Unter dem Titel

Skalenaufgelöste Experimente und statistische Analysen von turbulenten Nachlaufströmungen

vom Fachbereich Physik der
Carl von Ossietzky Universität Oldenburg
zur Erlangung des Grades eines

DOKTORS DER NATURWISSENSCHAFTEN
(DR. RER. NAT.)

genehmigte Dissertation.

Vorgelegt von

Stephan Lück

geboren am 24.10.1968 in Kassel.

Erstreferent: PROF. DR. JOACHIM PEINKE

Korreferent: PROF. DR. VOLKER MELLERT

Tag der Disputation: 15. JUNI 2001

Die wichtigste Funktion der Wissenschaft
besteht darin, das kosmische religiöse
Gefühl zu wecken und lebendig zu halten...

...Es ist sehr schwer dieses Gefühl jemandem
zu erklären, der es überhaupt nicht kennt.
Man empfindet die Bedeutungslosigkeit
menschlicher Wünsche und Ziele und die
Großartigkeit und die erstaunliche Ordnung,
die sich sowohl in der Natur als auch
in der Welt des Denkens offenbart.

ALBERT EINSTEIN

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **11**

1.1 Motivation und Ausgangspunkt 11
1.2 Zielsetzung 14
1.3 Aufbau dieser Arbeit 15

2 Grundlagen und Modellvorstellungen **17**

2.1 Ein wenig Hydrodynamik 17
2.1.1 Die Navier-Stokes-Gleichung 17
2.1.2 Die Reynoldsgleichungen und das Schließungsproblem 19
2.2 Statistik des Geschwindigkeitsfeldes 21
2.2.1 Spektrale Analyse 21
2.2.2 Wahrscheinlichkeitsdichten und Momente 22
2.2.3 Taylorhypothese 23
2.2.4 Statistik bei kontinuierlichen Feldern 24
2.3 Modellbildung in der Turbulenz 28
2.3.1 Einschränkungen der Strömungsform 28
2.3.2 Kaskadenvorstellung nach Richardson 29
2.3.3 Ähnlichkeitsbetrachtung nach Kolmogorov 30
2.4 Statistik in der turbulenten Kaskade 32
2.4.1 Das Geschwindigkeitsinkrement 32
2.4.2 Die Strukturfunktion und Momentenanalyse 33
2.4.3 Die Verteilungen der Inkremente 36

3 Experimente **39**

3.1 Aufbau und Durchführung 39
3.1.1 Windkanal 39
3.1.2 Versuchsaufbau 40
3.1.3 Messtechnik 41
3.2 Gitternachlauf 52
3.2.1 Beschreibung der Strömung 52
3.2.2 Charakterisierung und Konsistenz der Messungen . . . 53

3.2.3 Analyse der Daten mit ’klassischen’ Methoden 56
3.3 Zylindernachlauf 62
3.3.1 Beschreibung der Strömung 62
3.3.2 Beschreibung der Messreihen mit Charakterisierung . 64
3.3.3 Analyse der Daten mit ’klassischen’ Methoden 66

4 Methode der Markov-Analyse 71
4.1 Sinn und Ziel 71
4.2 Grundlegende Definitionen 72
4.3 Der Markov-Prozess 74
4.3.1 Die Chapman-Kolmogorov-Gleichung 75
4.3.2 Die Kramers-Moyal-Entwicklung 76
4.3.3 Die Fokker-Planck Gleichung 78
4.3.4 Verbindung zur ’klassischen’ Turbulenztheorie 79
4.4 Markov-Analyse mit Daten (die Realität) 80
4.4.1 Überprüfen der Markoveigenschaft 81
4.4.2 Bestimmung der Kramers-Moyal-Koeffizienten 89
4.4.3 Weitere Ergebnisse der Markov-Analyse der isotropen Gitterströmung und der Zylinderströmung im Fernfeld 93

5 Übergang in die vollentwickelte Turbulenz 97
5.1 Einleitung 97
5.2 Verwendete Messdaten 98
5.3 Momentenanalyse 100
5.4 Die Inkrement-Verteilungen in der Nähe des Zylinders 103
5.5 Der Markov-Test 105
5.6 Die Kramers-Moyal-Koeffizienten 110
5.7 Lösung der Fokker-Planck-Gleichung 120
5.8 Zerfall der Karmanschen Wirbel 123

6 Zusammenfassung und Ausblick 129

Anhang: Tabellen der verwendeten Messreihen 133

Literaturverzeichnis 135

Stichwortverzeichnis 141

Nachwort 145

Lebenslauf 147

Kapitel 1

Einleitung

In diesem Kapitel wird zunächst eine allgemeine Motivation des Themas dieser Arbeit sowie des wissenschaftlichen Ausgangspunkts dargestellt. Darauf folgt eine sich daraus erwachsende Zielsetzung der durchgeführten Untersuchungen. Abschließend gibt dieses Kapitel einen Überblick über den Aufbau der Arbeit mit einem kurzen Umriss der einzelnen Kapitel.

1.1 Motivation und Ausgangspunkt

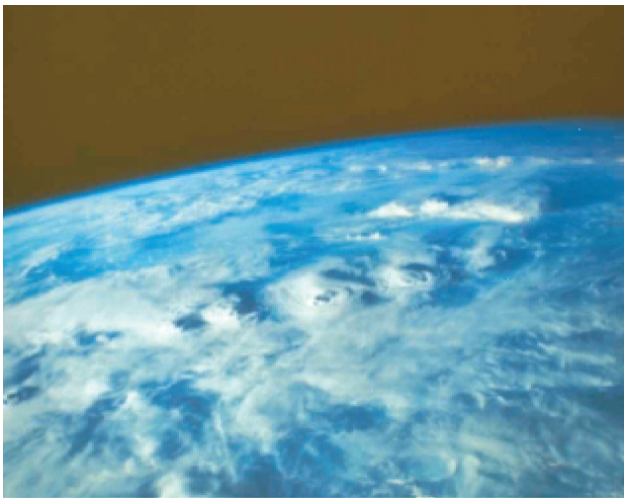


Abbildung 1.1: Turbulente Wolkenformation in der Erdatmosphäre.

Schon der erste Eindruck bei der Beobachtung turbulenter Strömungen zeigt, dass es sich bei der Turbulenz um ein äußerst komplexes Phänomen handeln muss. Alle Beobachtungsgrößen scheinen auf den ersten Blick irregulär zu fluktuieren. Selbst auftretende Strukturen, wie die Wolkenwirbel auf dem Photo (Abbildung 1.1), sind verwaschen und treten oft in irregulären unvorhersehbaren Abständen auf. Somit unterscheiden sich turbulente Strömungen

sehr weitreichend von laminaren, die in den klassischen Experimenten von O. Reynolds [56] gegen Ende des 19. Jahrhunderts eingehend studiert worden sind. Rein laminare Strömungen treten sowohl in der Natur, als auch in technischen Anwendungen, verglichen mit turbulenten Strömungen, sehr selten auf. Turbulenzen sind also eher die Regel, denn die Ausnahme.

Turbulente Strömungen üben, übrigens ebenso wie chaotische Phänomene, eine besondere Anziehungskraft auf den Beobachter aus. Dies mag einmal mit der Komplexität des Phänomens und der Faszination des Zufalls zusammen hängen, aber wohl mehr noch damit, dass trotz dieses scheinbar irregulären Treibens doch gewisse Strukturen vorhanden sind. Das Greif- und Begreifbare der Strukturen ist untrennbar verknüpft mit dem Unzugänglichen, dem Unberechenbaren des Zufalls. Wichtig hierbei ist, dass Struktur und Zufall nicht voneinander zu trennen sind, um das gesamte Phänomen adäquat zu erfassen. Da also das Zusammenspiel von Struktur und Zufall ausschlaggebend für die turbulente Strömung ist, nähert man sich einer angemessenen Beschreibung, in dem man versucht, dieses Zusammenwirken von Struktur und Zufall zu verstehen. Betrachtet man die Bestandteile einzeln, so werden, aufgrund des Wechselspiels, wesentliche Dinge nicht erfasst.

Eine zentrale Eigenschaft einer turbulenten Strömung ist, dass sie auch unter idealsten Rahmenbedingungen nicht vollständig exakt reproduziert werden kann. Das betrifft sowohl das Geschwindigkeitsfeld, als auch andere lokale strömungsrelevante Größen wie Druck, Temperatur, Dichte des Fluids, Konzentration von Verunreinigungen usw. Es kann daher keine eindeutige Beschreibung des zeitlichen Verlaufs dieser Größen gegeben werden. Damit ist auch keine Vorhersage dieser Strömungsvariablen möglich. Folglich sind die turbulenten Strömungsverhältnisse statistisch zu beschreiben. Dabei wird von der jeweils exakten Realisierung Abstand genommen, und in erster Näherung werden Mittelungsgrößen sowie die Fluktuationen um diese zum Gegenstand der Beschreibung.

Dies ist auch der historische Weg, der in der Turbulenzforschung eingeschlagen wurde. Erstmals hat O. Reynolds im Jahre 1895 statistische Überlegungen in die Turbulenzbetrachtung mit einbezogen [57]. G. I. Taylor formulierte in den dreißiger Jahren dieses Jahrhunderts eine erste statistische Theorie der Turbulenz [68] und gilt daher als der Begründer der *statistischen Turbulenzbeschreibung*. Eine Erweiterung der statistischen Turbulenztheorie auf inhomogene Strömungen wurde Anfang der 50er Jahre von J. Rotta vorgestellt, der aus den Grundgleichungen der Hydrodynamik Differentialgleichungen für die statistischen Korrelationen zwischen zwei Komponenten der Geschwindigkeitsschwankungen, sowie für die mittleren Abmessungen der Turbulenzelemente herleitete [60][61].

Der gerade herausgestellte statistische Charakter turbulenter Strömungen und die damit verbundene Unvorhersagbarkeit einzelner Ereignisse bedeutet

jedoch nicht das Fehlen eines Ursache-Wirkungs-Prinzips. Ausgangspunkt aller theoretischer Ansätze der Turbulenz ist die Annahme, dass alle Eigenschaften der Strömung ausnahmslos durch die Bewegungsgleichung des Fluids, die Navier-Skokes-Gleichungen, gegeben sind.

Eine Lösung dieser Gleichung ist auch für einfache turbulente Strömungen bislang nicht gefunden worden. Würde man diese jedoch kennen, so wären bei vollständig und exakt bekannten Anfangs- und Randbedingungen alle Details der Strömung zu jedem Zeitpunkt und an jedem Ort bestimmbar. Auch ist eine direkte numerische Lösung der Navier-Stokes-Gleichung im Fall der Turbulenz schon für relativ einfache Randbedingungen sehr aufwendig. Eine numerische Lösung für reale turbulente Strömungsverhältnisse ist aufgrund der benötigten Gitterpunkte der Simulation bei starker Turbulenz (s. Abschätzung [30]) selbst unter Berücksichtigung der Geschwindigkeitssteigerungen von Computern in den nächsten Jahrzehnten nicht möglich.

Die Statistik turbulenter Strömungen ist vergleichbar mit dem scheinbar statistischen Charakter chaotischer Phänomene, denen eine Bewegungsgleichung in Form einer Differentialgleichung zu Grunde liegt. Diese Differentialgleichung ist Ausdruck des Determinismus. Diese Ähnlichkeit zum deterministischen Chaos führte vornehmlich in den von der Begeisterung für dieses Gebiet geprägten 70er und 80er Jahren zu Versuchen, die Turbulenz mit den dort erarbeiteten Konzepten zu beschreiben (z.B. [12][45][47]). Ein Beispiel hierzu ist die Untersuchung der Energiedissipationsrate als multifraktales Objekt (z.B in [66]). Es scheint sich jedoch herauszustellen, dass man bei der Beschreibung der Turbulenz mittels der Konzepte aus der Chaostheorie zwar in machen Punkten einige Erkenntnisse über die Turbulenz gewinnen, jedoch bei weitem nicht die Vielfalt und Komplexität einer turbulenten Strömung erfassen kann.

Die oben angesprochene untrennbare Verknüpfung der auftretenden Strukturen mit dem Zufälligen, motiviert den weiterführenden Ansatz, bei der statistischen Beschreibung der Turbulenz das Augenmerk auf die stochastischen **Prozesse** zu legen, die in der Turbulenz ablaufen. Dieses stellte auch A. N. Kolmogorov 1985 fest, indem er sinngemäß folgendes formulierte: ”...Für mich war es von Anfang an klar, dass das hauptsächliche mathematische Instrument beim Studium turbulenter Strömungen eine Theorie **zufälliger** Funktionen mehrerer Veränderlicher sein muss...” (aus [73]). Eine solche Untersuchungsweise der stochastischen Prozesse, die in einer turbulenten Strömung ablaufen, ist derzeit noch nicht weit fortgeschritten. Sie steckt also gewissermaßen noch in den Kinderschuhen, woraus sich ein großer Handlungsbedarf ergibt.

Ausgehend von bekannten Beschreibungsmöglichkeiten beschäftigt sich diese Arbeit im Anschluß daran mit der weiterführenden Beschreibung des stochastischen Prozesses bei unteschiedlichen Laborströmungen.

1.2 Zielsetzung

Um sich der oben dargelegten Komplexität des Phänomens Turbulenz zu nähern, ist ein erstes Ziel dieser Dissertation die Aufnahme umfangreicher Messreihen an relativ einfachen und bekannten turbulenten Strömungen. Es wurden die gut bekannten Strömungsformen der Nachlaufströmung eines Gitters, sowie eines Zylinders gewählt. Diese Strömungen stellen neben den Randschichtströmungen (z.B. [4]) die Prototypen turbulenter Strömungen im Labor dar. Im Hinblick auf die oben angesprochene statistische Beschreibung der Turbulenz lag das besondere Augenmerk bei der Untersuchung auf einer messtchnisch möglichst vollständigen Erfassung des statistischen Prozesses innerhalb der Turbulenz. Dieser Prozess verläuft, wie in Kapitel 2 beschrieben wird, kaskadenartig über einen gewissen Längenskalenbereich, der bei der Messung vollständig aufgelöst werden muss.

Ein zweiter wichtiger und in der Vergangenheit noch nicht vollständig geklärter Aspekt, ist die Statistik der einzelnen Komponenten des Geschwindigkeitsfeldes. Daher wurde der überwiegende Teil der Messungen mit Sonden durchgeführt, die eine simultane Messung zweier Komponenten der lokalen Geschwindigkeit ermöglichen. In der aktuellen Turbulenzforschung gewinnt zudem die Frage nach der Beschreibung von nicht idealen turbulenten Strömungen, die der Realität näher kommen mehr und mehr an Bedeutung (z.B. [18][44][49]). Dabei ist beispielsweise die Frage, wie sich die Turbulenz hinter einem Strömungshindernis entwickelt, von besonderem Interesse. Die Bereiche der Nachlaufströmungen, die nicht der idealen Turbulenz entsprechen, waren demzufolge ein weiterer wichtiger Aspekt der durchzuführenden Messungen.

Da ganz allgemein die Behandlung von Messdaten mit statistischem Charakter der Wissenschaft noch prinzipielle Probleme bereitet, stehen in der experimentellen Turbulenzforschung Auswertungen von Messdaten und Analyse verschiedener Analyseverfahren im Mittelpunkt der Arbeit. Die Verfahren, die bei der Analyse der Messdaten turbulenter Strömungen angewandt werden, stehen in engem Zusammenhang mit den Modellvorstellungen der Turbulenz. Da eine vollständige Theorie der Turbulenz aufgrund der oben beschriebenen intrinsischen Schwierigkeiten noch nicht vorliegt, kommt diesen Modellvorstellungen und Beschreibungskonzepten eine besondere Bedeutung zu. Diese Modelle sind eng an die Experimente und ihre Auswertungen geknüpft, woraus sich die Bedeutung der experimentellen Untersuchungen in der Turbulenzforschung ergibt, die leider momentan im Zeitalter der Computersimulationen immer weniger beachtet wird.

Bezüglich der Beschreibung der Turbulenz ergibt sich bei der Analyse der Messdaten die Schwierigkeit, dass die Unzulänglichkeiten in den Beschreibungsmodellen, sowie messtechnische Probleme zusammen kommen. Es stellt

sich dem Experimentator also hier die Aufgabe einerseits über die Analyse der Daten die Beschreibungsmodelle zu entwickeln, sowie andererseits Aussagen über Eigenschaften der untersuchten Strömung zu machen. Gerade bei realen und damit komplexen Strömungen ist dies eine zentrale und schwer zu überwindende Schwierigkeit, da Kontrollgrößen nicht bestimmbar sind, bzw. das Phänomen zu stark reduzieren, so dass wiederum keine Aussage möglich ist. Ein Beispiel hierzu sind die in Kapitel 3 besprochenen Skalenexponenten der Momentenanalyse, die in nicht idealer Turbulenz (Kapitel 5) zwar formal durchgeführt werden kann, jedoch dort ihren ursprünglichen Gültigkeitsbereich verlässt.

Ein ganz wesentliches Ziel der aktuellen Turbulenzforschung ist es, Verfahren und Modelle zu entwickeln, die die Beschreibung realer Strömungen ermöglichen. Bis dorthin ist es durch die dargelegten Gründe noch ein weiter Weg auf dessen Voranschreiten diese Arbeit einen Beitrag leisten möchte.

Es gilt zu untersuchen, welche Modelle und Methoden der Turbulenz auch nicht ideale Strömungsformen adäquat beschreiben bzw. wo es Grenzen gibt, und ob sie eventuell erweiterbar sind. Desweiteren ist nach anderen weiter gefassten Ansätzen zu suchen und zunächst zu prüfen, ob sie für ideale Strömungen konform zu den bekannten Methoden sind und im zweiten Schritt, was sie für die Beschreibung nicht idealer Turbulenz leisten können. Natürlich übersteigt die Lösung dieser Fragen die Möglichkeiten Einzelner, und erst Recht eine solche Arbeit. Daher widmet sich diese Arbeit einzelnen Teilfragestellungen aus diesem Kontext. Diese werden nun im folgenden Überblick über diese Arbeit dargestellt.

1.3 Aufbau dieser Arbeit

Um die im vorigen Abschnitt angesprochenen Zielsetzungen in einen größeren physikalischen Zusammenhang zu stellen und den Untersuchungen die entsprechende Basis zu geben, werden im folgenden Kapitel zunächst die notwendigen physikalischen Konzepte der Turbulenzforschung dargestellt. Zu Beginn werden die hydrodynamischen Grundlagen kurz zusammengefasst. Nach der darauf folgenden Erörterung der wesentlichen Begriffe einer statistischen Beschreibung des turbulenten Geschwindigkeitsfeldes, und der Beschreibung der Modellbildung in der Turbulenz, wird die Statistik der sogenannten turbulenten Kaskade, in der diese beiden Aspekte einfließen, genauer behandelt. Diese bildet das Fundament der Auswertungen der experimentellen Untersuchungen.

Im Anschluß an dieses grundlegende Kapitel, werden die im Rahmen dieser Dissertation durchgeführten Experimente beschrieben. Nach der Schilderung des experimentellen Aufbaus und der technischen Rahmenbedingungen, werden die beiden untersuchten Strömungen, die Gitterströmung und der Zy-

lindernachlauf, beschrieben. Dabei werden zunächst die im Grundlagenkapitel besprochenen Analysemethoden verwendet. Dann werden die Ergebnisse mit ähnlichen Messdaten anderer Forschergruppen verglichen, wodurch die Qualität der Messreihen belegt wird. Ein weiterer Punkt der Untersuchungen geht der aktuellen Fragestellung nach, wie sich die Statistik der einzelnen Geschwindigkeitskomponenten voneinander unterscheidet.

Daran schließt sich ein zweites theoretisches Kapitel an, das eine neue Analysemethode der turbulenten Messreihen beschreibt. Diese Methode basiert auf der Theorie der Markov-Prozesse und wird daher 'Markov-Analyse' genannt. Sie wurde von Prof. Friedrich und Prof. Peinke in [28] erstmalig auf turbulente Datensätze angewandt. In diesem Kapitel werden zunächst die Grundzüge dieser Analyse dargestellt, soweit sie zum Verständnis der weiteren Auswertungen der Messdaten notwendig sind. Darauf folgt die Beschreibung der Umsetzung des Verfahrens. Dabei werden die einzelnen Schritte durch Auswertungen der zuvor vorgestellten Messdaten begleitet. Damit ist die direkte Realisierung des Verfahrens besser nachvollziehbar und ist dann im folgenden schon bekannt, so dass die neuen Aspekte der weiteren Auswertung nicht durch Fragestellungen, die das Analyseverfahren selbst betreffen, verdeckt werden.

Nach der Besprechung der Einzelheiten der Markov-Analyse und deren Applikation auf Messdaten, die der idealen Turbulenz recht nahe kommen, wird eine ausführliche Auswertung des Geschwindigkeitsfeldes hinter einem Zylinder mittels dieser Analysemethode vorgestellt. Die Strömung verliert im Nahfeld hinter dem Zylinder die Eigenschaften der idealen isotropen Turbulenz. Es wird zunächst gezeigt, dass die in der idealen Strömung verwendeten 'klassischen' Analysemethoden im Nahfeld des Zylindernachlaufs keine zuverlässige Beschreibung der Strömungsverhältnisse zulassen. Zentrale Aspekte werden mit diesen Methoden nicht erfasst.

Im Anschluß daran werden die Koeffizienten der Markov-Analyse, die sogenannten Kramers-Moyal-Koeffizienten, bestimmt. Durch die Übereinstimmung der gemessenen Verteilungen mit den aus den Koeffizienten numerisch berechneten Verteilungen, zeigt sich die Gültigkeit dieses Verfahrens und der Koeffizienten auch in diesem Fall der nicht idealen Turbulenz. Bei der nachfolgenden Untersuchung der erhaltenen Koeffizienten stehen die Abhängigkeiten von der untersuchten Längenskala und vom Abstand des Messsensors vom Turbulenz erzeugenden Zylinder im Vordergrund. Die Koeffizienten zeigen strukturelle Änderungen unter Variation dieser Parameter, die mit dem Auftreten und Verschwinden der kohärenten Wirbelstrukturen in Verbindung gebracht werden können.

Das abschliessende Kapitel fasst die gefundenen Ergebnisse noch einmal in kompakter Form zusammen und möchte einige Hinweise zu möglichen weiterführenden Untersuchungen geben.

Kapitel 2

Grundlagen und Modellvorstellungen

In diesem Kapitel werden die wichtigsten hydrodynamischen Begriffe und Konzepte beschrieben, die benutzt werden, um das Phänomen der Turbulenz naturwissenschaftlich zu erfassen. Da diese Konzepte den Rahmen für die darauf folgenden Kapitel darstellen und nicht der Gegenstand dieser Arbeit sind, soll keine strenge Herleitung gegeben werden. Vielmehr wird Wert auf die Bedeutung und inneren Zusammenhänge gelegt. Weitergehendes kann z. B. in [35], [41], [46] oder [62] nachgelesen werden.

2.1 Ein wenig Hydrodynamik

2.1.1 Die Navier-Stokes-Gleichung

Wie schon im Einleitungskapitel angedeutet, ist die grundlegende Bewegungsgleichung einer Strömung auch im turbulenten Fall die *Navier-Stokes-Gleichung*. Da in dieser Arbeit nur Luftströmungen weit unterhalb der Schallgeschwindigkeit betrachtet werden und daher das Fluid Luft als inkompressibel angenommen werden kann, sei hier die Navier-Stokes-Gleichung für diesen Fall angegeben. In karthesischen Koordinaten unter Verwendung der Einstein'schen Summenkonvention lautet sie:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + f_i, \tag{2.1}$$

bzw. in vektorieller Form:

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} = -\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\, p + \nu \Delta \boldsymbol{u} + \boldsymbol{f}. \tag{2.2}$$

Dabei bezeichnen $\boldsymbol{u}$ und p die Geschwindigkeit bzw. den Druck am Ort $\boldsymbol{x}$ zur Zeit t. ρ beschreibt die Dichte, ν die kinematische Viskosität des Fluids

und schließlich $\boldsymbol{f}$ die Dichte der Summe der äußeren Kräfte. Es sei noch kurz erwähnt, dass für die betrachteten Strömungen (Laborexperimente) die Abmessungen des Strömungsfeldes so klein sind, dass die durch die Erdschwere hervorgerufenen Druckunterschiede keine messbare Variation der Dichte ρ hervorruft. Bei den angesprochenen kleinen Strömungsgeschwindigkeiten sind die durch Dissipation erzeugten Wärmemengen klein und die Viskosität ν kann ebenfalls als konstant angenommen werden. Desweiteren ist die äußere Kraft $\boldsymbol{f}$ bei den hier untersuchten Strömungen gleich Null.

Die Navier-Stokes-Gleichung ist eine Folgerung aus der Newtonschen Bewegungsgleichung $d\boldsymbol{p}/dt = \boldsymbol{F}$ für ein Volumenelement des Fluids.[1] Die linke Seite von Gleichung (2.1) bzw. (2.2) stellt die totale zeitliche Ableitung der lokalen Geschwindigkeit $\boldsymbol{u}$ dar. Hierbei wird der zweite Term $(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}$ als *Advektionsterm* bezeichnet. Er gibt die Geschwindigkeitsänderung an, die durch räumliche Verlagerung des Fluidteilchens verursacht wird. Der Advektionsterm ist nichtlinear in $\boldsymbol{u}$ und damit die Ursache der Komplexität der Turbulenz.

Die Terme auf der rechten Seite beschreiben die verschiedenen auftretenden Kräfte. Dabei beschreibt der erste Term $-1/\rho\,\mathrm{grad}\,p$ die wirkenden Druckkräfte, der zweite Term $\nu\Delta\boldsymbol{u}$ beschreibt eine innere Kraft, die durch die Zähigkeit des Fluids und die damit verbundene innere Reibung hervor gerufen wird. Dieser zweite Term wird *Dissipationsterm* genannt und hat einen glättenden Effekt. Er steht damit sozusagen in Konkurrenz zum Advektionsterm. Je nachdem welcher dieser beiden Terme überwiegt, wird die Strömung entweder turbulent oder laminar. Betrachtet man das Verhältnis dieser beiden Terme, so ergibt sich mit Hilfe einer Dimensionsbetrachtung (mit L für die Länge, T für die Zeit und $U = L/T$) über

$$\frac{(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}}{\nu\Delta\boldsymbol{u}} \hat{=} \frac{(L/T\cdot 1/L)\cdot L/T}{\nu\cdot 1/L^2\cdot L/T} = \frac{L\cdot U}{\nu} \hat{=} : Re \tag{2.3}$$

eine dimensionslose Zahl Re, die *Reynoldszahl*, die ein Maß für das Verhältnis des Advektionsterms zum Dissipationsterm darstellt und damit in gewisser Weise angibt, wie turbulent eine Strömung ist. Eine kleine Reynoldszahl bedeutet damit schwache Turbulenz oder sogar laminare Strömung, während bei hohen Reynoldszahlen stark turbulente Strömungen vorliegen.

Diese besondere Zahl der Turbulenzforschung tritt erneut auf, wenn man die Navier-Stokes-Gleichung, etwa in der Form von Gleichung (2.2), dimensionslos macht. Dies ist ein gängiges Verfahren, um Strömungen mit verschiedenen Größenverhältnissen miteinander zu vergleichen. Dazu wählt man als Vergleichsgrößen die Geschwindigkeit $\boldsymbol{u}$, sowie die Länge l. Normiert man diese Größen mit typischen Werten, also einer typischen mittleren Geschwindigkeit U, sowie einer charakteristischen Länge L und drückt auch die weiteren

[1] $\boldsymbol{p}$ bezeichnet hier ausnahmsweise den Impuls

Größen in der Gleichung durch diese aus, so erhält man schließlich die dimensionslose Form der Navier-Stokes-Gleichung

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} = -\mathrm{grad}\, p + \frac{1}{Re}\Delta \boldsymbol{u} + \boldsymbol{f}. \tag{2.4}$$

mit den nun dimensionslosen Größen $\boldsymbol{u}$, t, p und $\boldsymbol{f}$, die der Übersichtlichkeit halber wieder mit den gleichen Buchstaben wiedergegeben sind. Der einzig verbliebene Parameter dieser Gleichung ist die Reynoldszahl $Re := UL/\nu$. Damit haben Strömungen mit gleicher Reynoldszahl die gleiche zugrunde liegende Differentialgleichung und verhalten sich daher *ähnlich*. Dies ist das *Ähnlichkeitsprinzip* der Hydrodynamik.

Zur vollständigen Beschreibung einer Strömung wird noch eine zweite Gleichung benötigt, die *Kontinuitätsgleichung*. Diese ist für den hier behandelten Fall von inkompressiblen Fluiden besonders einfach und lautet

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0. \tag{2.5}$$

Nun könnte man meinen, dass mit der Kenntnis der Bewegungsgleichung die Lösung des Turbulenzproblems nicht fern ist. Trotz der recht einfach zu verstehenden Form der Navier-Stokes-Gleichung (2.4), sind sie im Detail sehr komplex und ihre Lösung ist selbst für recht einfache Randbedingungen schon bei moderaten Reynoldszahlen sehr aufwendig bzw. (zumindest mit heutigen Mitteln) nicht möglich.

Noch schwieriger, bzw. in den meisten Fällen gänzlich aussichtslos, ist eine analytische Lösung. Der mathematische Grund ist die Nichtlinearität des Advektionsterms, die gerade bei einem Gleichungstyp einer partiellen Differentialgleichung, wie er hier vorliegt, besonders schwierig zu behandeln ist. Diese Nichtlinearität ist essenziell, sehr weitreichend und kann gerade für turbulente Strömungen daher auch nicht wegdiskutiert bzw. linearisiert oder vereinfacht werden.

2.1.2 Die Reynoldsgleichungen und das Schließungsproblem

Im vorigen Abschnitt wurde kurz beschrieben, dass die Nichtlinearität des Advektionsterms für die Komplexität einer turbulenten Strömung verantwortlich ist. Durch die damit verbundene Irregularität kann eine turbulente Strömung mathematisch nicht mehr streng erfasst werden.

Ein Weg, von der Navier-Stokes-Gleichung ausgehend, diesem scheinbar zufälligen Verhalten Rechnung zu tragen, ist folgende Annahme, die auf O.

Reynolds zurückgeht. Man betrachtet dabei die Strömung als bestehend aus einer regulären Grundströmung, die überlagert ist von schnellen unregelmäßigen Fluktuationen. Die Geschwindigkeit $\boldsymbol{u}$ und der Druck p werden demzufolge zusammengesetzt aus einem mittleren Anteil $\bar{\boldsymbol{u}}$ bzw. $\bar{p}$, der sich nur langsam mit der Zeit ändert und einer im Vergleich dazu schnell fluktuierenden Abweichung $\boldsymbol{u}'$ bzw. p'. Also

$$\boldsymbol{u} = \bar{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{u}' \quad \text{bzw.} \quad p = \bar{p} + p'. \tag{2.6}$$

Setzt man diese Ausdrücke in die Navier-Stokes-Gleichung (2.1) bzw. (2.2) ein, so ergeben sich nach kurzer Rechnung die *Reynolds-Gleichungen* für die mittlere Geschwindigkeit $\bar{u}$

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \overline{u_j}\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} - \frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 \overline{u_i}}{\partial x_j \partial x_j} + \overline{f_i}, \tag{2.7}$$

wobei nun durch den Advektionsterm die sogenannten *Reynoldsschen Spannungen* $-\rho\,\overline{u_i' u_j'}$ zusätzlich auftreten. Sie sind eine Folge des von den Fluktuationen bewirkten Impulstransportes und beschreiben daher den Einfluss der Geschwindigkeitsfluktuationen auf die mittlere Strömung. Mit $\hat{T}_t := -\rho\left(\overline{u_i' u_j'}\right)$ als Tensor der Reynolds-Spannungen lautet diese Gleichung in vektorieller Form:

$$\frac{\partial \overline{\boldsymbol{u}}}{\partial t} + (\overline{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla)\overline{\boldsymbol{u}} = -\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\,\overline{p} + \frac{1}{\rho}\mathrm{div}\hat{T}_t + \nu\Delta\overline{\boldsymbol{u}} + \overline{\boldsymbol{f}}. \tag{2.8}$$

Das Problem ist nun, dass für eine Lösung dieser gemittelten Gleichung die Reynoldsspannungen bekannt sein müssen und damit Informationen über die Fluktuationen benötigt werden. Eine Gleichung für die Fluktuationen u_i' erhält man durch Abziehen der Reynoldsgleichung von der Navier-Stokes-Gleichung. Allerdings treten darin Terme mit Ableitungen der Fluktuationen von höherer Ordnung auf. Im Prinzip kann man so fortfahren und damit alle Ableitungen der Ordnung n der Fluktuationen bestimmen. Jedoch ist dies immer nur über die Kenntnis der Ableitungen der Fluktuationen von der Ordnung $n+1$ möglich. Dieses Dilemma nennt man auch das *Schließungsproblem* der Turbulenz.

Da man natürlich nicht mit diesem gekoppelten System unendlich vieler Gleichungen rechnen kann, besteht die einzige Hoffnung darin, eine irgendwie geartete Schließung dieser Gleichungen zu finden, die dann das unbekannte Glied in der Kette durch bekannte Größen ausdrückt. Dazu werden in der Turbulenzforschung sehr verschiedene Ansätze verfolgt. Es wird versucht dies über Rechenschemata, Hypothesen, Modellvorstellungen oder Vereinfachungen zu erreichen. Allen Verfahren gemein ist dabei die Eigenschaft, dass sich diese Schließungen nicht direkt aus den Navier-Stokes-Gleichungen 'erschließen' lassen.

Relativ einfache Ansätze, die die Schließung gleich auf der ersten Stufe über phänomenologische Annahmen vornehmen, sind die Austauschformel von Boussinesq oder die Mischungsformel von Prantl. Doch führten sie bislang zu keinen befriedigenden Resultaten [62].

2.2 Statistische Beschreibung des Geschwindigkeitsfeldes

Aufgrund der Komplexität bzw. der Unregelmäßgkeiten einer turbulenten Strömung, die nicht exakt reproduziert werden kann, sind nur statistische Aussagen über das Geschwindigkeitsfeld möglich. Dazu werden nun die grundlegenden Vorgehensweisen und Konzepte dargestellt. Einige Begriffe werden zudem später im Kapitel 4 über die Markovanalyse nochmals benötigt.

2.2.1 Spektrale Analyse

Bereits durch Beobachten turbulenter Strömungen mit dem Auge, kann man feststellen, dass in einer solchen Strömung vielfältige Strukturen verschiedener Größe beteiligt sind. Dies hat schon Leonardo da Vinci dazu angeregt, die Turbulenz als zusammengesetzt aus Wirbeln verschiedener Größen darzustellen (Abbildung 2.1).

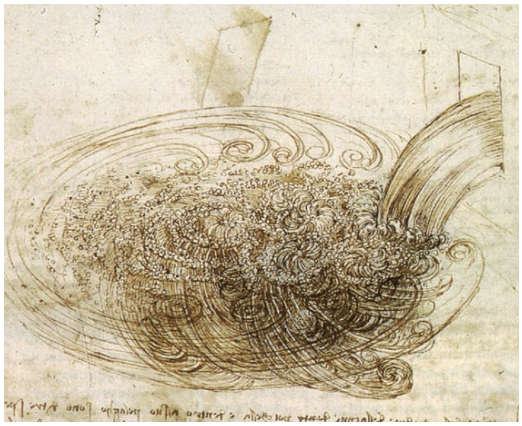
a)  b)

Abbildung 2.1: Zeichnungen von Leonardo da Vinci zur inneren Struktur turbulenter Strömungen. Teil a) zeigt einen Wassereinlauf und Teil b) eine Umströmung eines zylinderförmigen Hindernisses (aus [23]).

Eine erste mathematische Annäherung an diese Sichtweise bietet sich durch die Spektral- oder *Fourier-Analyse* des turbulenten Geschwindigkeitsfeldes.

Eine Fourier-Zerlegung kann nach der Zeit und ebenso nach den räumlichen Koordinaten durchgeführt werden. Da das mathematische Vorgehen in beiden Fällen analog ist, soll hier nur kurz auf die zeitliche Fourier-Zerlegung eingegangen werden. Die Fouriertransformation ist über

$$F(\omega) = \int u(t) e^{-i\omega t} dt \tag{2.9}$$

definiert. Mit der so erhaltenen spektralen Funktion $F(\omega)$ kann man das *Leistungsspektrum*

$$P(\omega) \propto |F(\omega)|^2 \tag{2.10}$$

berechnen. Das Leistungsspektrum gibt Auskunft über den Energiebeitrag und damit den Anteil einer bestimmten Wirbelgröße im turbulenten Feld pro Frequenzintervall $d\omega$. Treten, beispielsweise aus geometrischen Gründen, bestimmte Wirbelgrößen vermehrt auf, so führt das zu einem höheren Wert des Leistungsspektrums bei Frequenzen ω, die der Wirbelgröße entspricht.

2.2.2 Wahrscheinlichkeitsdichten und Momente

Um eine genauere Beschreibung der Statistik des Geschwindigkeitsfeldes vorzunehmen, müssen entsprechende Größen aus der mathematischen Wahrscheinlichkeitstheorie übertragen werden. Die wichtigsten seien hier kurz dargestellt.

Der Geschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{u}$ ist in der klassischen Eulerschen Darstellung eine eindeutige deterministisch gegebene Größe als Funktion von Ort und Zeit. Sie wird nun als *Zufallsvariable* aufgefasst. Der wichtigste Begriff zur Beschreibung einer durch eine Zufallsvariable gegebenen Größe, hier $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$, ist die *Wahrscheinlichkeitsdichte* $p(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}, t)$. Mit ihr ist über $p(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}, t) d\boldsymbol{u}$ die Wahrscheinlichkeit gegeben, dass zur Zeit t am Ort $\boldsymbol{x}$ die Koordinaten des Geschwindigkeitsvektors $\boldsymbol{u}$ im Bereich von u_i bis $u_i + du_i$ liegen. Die Funktion $p(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}, t)$ erfüllt die Normierungsbedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}, t)\, d\boldsymbol{u} = 1, \tag{2.11}$$

wobei in karthesischen Koordinaten $d\boldsymbol{u} = du_1 du_2 du_3$. Die durch spitze Klammern gekennzeichneten *Erwartungswerte* werden über

$$\langle u_i(\boldsymbol{x}, t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u_i(\boldsymbol{x}, t) p(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}, t)\, d\boldsymbol{u} \tag{2.12}$$

berechnet.

Bei der im vorigen Abschnitt eingeführten Reynoldsschen Betrachtung ist die Geschwindigkeits*schwankung* $\boldsymbol{u}'$ eingeführt worden, dessen Wahrscheinlichkeitsdichte mit $q(\boldsymbol{u}', \boldsymbol{x}, t)$ bezeichnet sein soll. Sie erfüllt ebenfalls die Normierungsbedingung und definitionsgemäß verschwindet der Erwartungswert, der analog zu Gleichung (2.12) berechnet wird.

Die Definition des Erwartungswertes (2.12) läßt sich verallgemeinern, indem man für die zugrunde liegende Größe, hier $u_i(\boldsymbol{x}, t)$, auch höhere Potenzen n zulässt.

$$\langle u_i(\boldsymbol{x}, t)^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u_i(\boldsymbol{x}, t)^n p(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}, t)\, d\boldsymbol{u} \tag{2.13}$$

Die so entstehenden Größen werden dann n-tes Moment genannt und charakterisieren die Dichteverteilung p. So ist also der Erwartungswert das erste Moment. Die Momente der Schwankungsgrößen $u_i' = u_i - \langle u_i \rangle$

$$\langle u_i'(\boldsymbol{x}, t)^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u_i'(\boldsymbol{x}, t)^n p(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}, t)\, d\boldsymbol{u} \tag{2.14}$$

werden *Zentrale Momente* genannt und sind in der Turbulenzforschung besonders wichtig. Beispielsweise entspricht die *Standardabweichung* σ_{u_i} dem zweiten zentralen Moment

$$\sigma_{u_i} = \left\langle u_i'(\boldsymbol{x}, t)^2 \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u_i'(\boldsymbol{x}, t)^2 p(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}, t)\, d\boldsymbol{u} \tag{2.15}$$

und gibt die Breite der Verteilung an. Das dritte zentrale Moment beschreibt die Schiefe der Verteilung und wird *Skewness* genannt. Momente ungerader Ordnung geben Aufschluß über die Symmetrie-Eigenschaften der Verteilung, während die geraden Momente die Breiten-Eigenschaften beschreiben. Wenn alle Momente einer Verteilung bekannt sind, so läßt sich die Verteilung eindeutig daraus bestimmen. Sie ist also vollständig durch ihre Momente charakterisiert.

Aus der Standardabweichung und dem Mittelwert der Geschwindigkeit an einem Ort $\boldsymbol{x}$ lässt sich der *Turbulenzgrad* an diesem Ort

$$I(\boldsymbol{x}) \equiv \frac{\sigma_u(\boldsymbol{x})}{\langle u(\boldsymbol{x}, t) \rangle_t} \tag{2.16}$$

definieren. Er gibt die Stärke der Fluktuationen bezogen auf die mittlere Strömungsgeschwindigkeit an und wird zumeist in Prozent angegeben.

2.2.3 Taylorhypothese

Da in der Navier-Stokes-Gleichung (2.1) die wichtigsten Terme Ableitungen der Ortskoordinaten beinhalten, beziehen sich die Modelle und Konzepte zur

Beschreibung turbulenter Vorgänge im wesentlichen auf den Ortsraum. Die Messungen hingegen sind zumeist Zeitserien, die an einem Ort in der turbulenten Strömung aufgenommen werden. Für einen Vergleich der Messdaten mit den Turbulenzmodellen, ist daher von der Zeit- zur Raumvariablen umzurechnen. Die sogenannte *Taylorhypothese* der eingefrorenen Turbulenz besagt, dass bei kleinem Turbulenzgrad (s. Gleichung (2.16)) sich die Strömung, während sie sich über den Messsensor bewegt, nicht wesentlich ändert. Damit kann also über die mittlere Geschwindigkeit mittels

$$\Delta r = \bar{u}\Delta t \tag{2.17}$$

von der Zeit- zur Ortskoordinate übergegangen werden. Da die Turbulenz sich jedoch auch während des Passierens des Sensors leicht verändert, treten bei der Umrechnung kleine Abweichungen auf. Trotz dieser Fehlerquelle ist die Umrechnung für kleine Turbulenzgrade ($< 10\%$) allgemein akzeptiert (s. dazu auch [46]). Die Umrechnung über die mittlere Geschwindigkeit beinhaltet umso weniger Fehler, je kleiner der zu bestimmende räumliche Abstand Δr und je kleiner der Turbulenzgrad I ist.

Die Navier-Stokes-Gleichung (Gl. (2.2) bzw. (2.4)) ist eine Gleichung für das Geschwindigkeitsfeld eines Kontinuums. Das bedeutet für die Turbulenz, dass die Bewegung an benachbarten Punkten im Strömungsfeld nicht unabhängig voneinander verläuft. Diese Eigenschaft wurde bislang noch nicht berücksichtigt und wird nun im folgenden betrachtet.

2.2.4 Statistik bei kontinuierlichen Feldern

Der Korrelationstensor

Bei einer Berücksichtigung des Feldcharakters sind die Geschwindigkeitsvektoren $\boldsymbol{u}$ nicht mehr unabhängig voneinander. Es bestehen *Korrelationen* zwischen ihnen. Zunächst seien hier die Korrelationen zwischen den Fluktuationen erwähnt. Allgemein sind sie für verschiedene Komponenten zu zwei unterschiedlichen Zeiten an zwei verschiedenen Orten des Geschwindigkeitsvektors über

$$R_{ij}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{r}, \tau) = \left\langle u_i'(\boldsymbol{x}, t)\, u_j'(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{r}, t + \tau) \right\rangle \tag{2.18}$$

definiert und stellen damit zentrale Momente zweiter Ordnung dar. R_{ij} ist ein Tensor zweiter Stufe. Die Diagonalelemente, für die $i = j$ gilt, werden als *Autokorrelation* der entsprechenden Geschwindigkeitskomponente bezeichnet.

Üblicherweise werden die Korrelationsfunktionen in der normierten Form

$$R_{ij}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{r},\tau) = \frac{\left\langle u_i'(\boldsymbol{x},t)\, u_j'(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r},t+\tau)\right\rangle}{\left[\langle u_i'^2(\boldsymbol{x},t)\rangle \left\langle u_j'^2(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r},t+\tau)\right\rangle\right]^{1/2}} \tag{2.19}$$

benutzt. So ist bei einem Wert von $R_{ij} = 1$ vollständige Übereinstimmung der Größen u_i' und u_j' gegeben. Für $\boldsymbol{r} \to \infty$, bzw. $\tau \to \infty$ sind u_i' und u_j' unabhängig voneinander und die Korrelation R_{ij} verschwindet.

Die Autokorrelationen R_{jj}, also die Diagonalelemente des Korrelationstensors, hängen über die Fouriertransformation direkt mit dem oben besprochenen Leistungsspektrum $P_j(\omega)$ der entsprechenden Geschwindigkeitskomponente u_j zusammen. Es gilt

$$P_j(\omega) \propto \int R_{jj}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \tag{2.20}$$

Längenmaße in der Turbulenz

Über die Korrelationsfunktion werden in der Turbulenz sogenannte Längenmaße eingeführt.[2] Als erstes sei das Integral- bzw. Makro-Längenmaß (oder kurz *integrale Länge*) genannt, das durch

$$L_{ijk}(\boldsymbol{x},t) \;:=\; \frac{1}{2\left\langle u_i'(\boldsymbol{x},t) u_j'(\boldsymbol{x},t)\right\rangle} \int_0^{+\infty} R_{ij}(\boldsymbol{x},t,r_k,0)\, dr_k. \tag{2.21}$$

definiert wird. Als einfache Vorstellung für diese Größe kann man die integrale Länge L als Abmessung einheitlich bewegter Fluidmassen interpretieren.

Als zweites wichtiges Längenmaß gilt das von G. I. Taylor eingeführte *Mikro-Längenmaß* λ, das auch oft einfach als *Taylor-Länge* bezeichnet wird. Sie wird durch die Gleichung

$$\left\langle \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_i}\right)^2 \right\rangle = \frac{\langle u_i'^2\rangle}{\lambda_i^2}. \tag{2.22}$$

definiert und steht mittels der Gleichung

$$\lambda_i = \sqrt{\langle u_i'^2\rangle \Big/ \frac{-\partial^2 R_{ii}}{\partial r_i^2}} \tag{2.23}$$

[2] bei Variation von t können in analoger Weise auch Zeitmaße definiert werden.

mit der Autokorrelation R_{ii} in Beziehung.[3] Bei der Bestimmung der Taylorlänge λ aus den Messdaten heraus, muss also $\left\langle \left(\partial u_i'/\partial x_i\right)^2 \right\rangle$ ermittelt werden. Aufgrund der endlichen Ortsauflösung des Messsensors wird man bei der einfachen Annäherung durch einen Differenzenquotienten ein fehlerhaftes Ergebnis bekommen. Das folgende von Aronson und Löfdahl in [6] beschriebene Verfahren umgeht dieses Problem. Man bestimmt den Quotienten $\left\langle \left[\left(u_i'(x+r) - u_i'(x)\right)/r\right]^2 \right\rangle$ für die 20 kleinsten Längen r den und trägt deren Kehrwert gegen r auf. Diese Werte liegen in sehr guter Näherung auf einer Parabel und man kann über eine Anpassung einer Parabel die Extrapolation gegen $r = 0$ durchführen. Weichen aufgrund der begrenzten Sensorauflösung die Werte für die kleinsten r leicht ab, so werden sie für die Anpassung nicht berücksichtigt. Damit können die Ungenauigkeiten bei der Bestimmung von λ über den Differenzenquotienten umgangen werden und man erhält bessere Werte für die Taylorlänge λ.

Versucht man verschiedenartige Strömungen wie zum Beispiel Gitternachlaufströmung und Zylindernachlaufströmung miteinander zu vergleichen, so stößt man auf das Problem, dass in den unterschiedlichen Strömungen die Turbulenz auch unterschiedlich erzeugt wird. Wählt man gemäß des Ähnlichkeitsgesetzes vergleichbare Konfigurationen und damit gleiche Reynoldszahlen, so sind doch die Strömungen aufgrund ihrer unterschiedlichen Randbedingungen, die auf L definiert sind, verschieden. Man erhält eine vergleichbare Turbulenz erst bei Übereinstimmung der sogenannten Taylorschen-Reynoldszahl R_λ, die durch

$$R_\lambda := \frac{\sqrt{\langle u'^2 \rangle}\,\lambda}{\nu} \tag{2.24}$$

über die Taylorlänge und die Standardabweichung definiert ist. Sie trägt der unterschiedlichen Entwicklung der Turbulenz Rechnung, indem sie aus Größen, die aus der entwickelten turbulenten Strömung entnommen werden, ermittelt wird. Dies unterstreicht die Bedeutung der Taylorlänge.

Zwischen der Taylorschen Reynoldszahl R_λ und der 'gewöhnlichen' Reynoldszahl Re, die über eine charakteristische Länge L ermittelt wird, kann die Beziehung

$$R_\lambda \propto \sqrt{Re} \tag{2.25}$$

hergeleitet werden (siehe dazu [35]). Diese Beziehung stellt ein wichtiges Kriterium bei der Validierung von Messreihen dar (s. auch 3.2.2 und 3.3.3).

[3] Eine genaue Ableitung ist z. B. in [62] nachzulesen.

Mehrpunktverteilungen

Zusätzlich zu der Verteilung $p(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t))$ von $\boldsymbol{u}$ an einem Ort $\boldsymbol{x}$ zur Zeit t kann man nun auch eine Verteilung $p(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t),\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x}',t'))$, die über ein zusätzliches zweites Kordinatenpaar $\boldsymbol{x}'$ und t' bestimmt ist, betrachten. Auch diese sogenannte *Zweipunktverteilung* soll wieder die Normierungsbedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t),\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x}',t'))\,d\boldsymbol{u}d\boldsymbol{u}' = 1, \tag{2.26}$$

erfüllen, womit sich die oben eingeführte einfache Verteilung durch

$$p(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t),\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x}',t'))\,d\boldsymbol{u}' \tag{2.27}$$

ergibt. Mit dieser Definition folgt der Korrelationstensor R_{ij} direkt über die Definition der Momente als erstes Moment des Produktes der Schwankungen $u_i'u_j'$

$$R_{ij}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{r},\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u_i'u_j'\; p(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t),\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x}',t'))\,d\boldsymbol{u}d\boldsymbol{u}' \tag{2.28}$$

mit $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}$ und $\tau = t' - t$.

Da die Mehrpunkt-Wahrscheinlichkeitsdichten den gleichen Beziehungen gehorchen wie die einfachen Verteilungsfunktionen, sind diese ebenso durch den vollständigen Satz der zugehörigen Momente eindeutig charakterisiert. Ein Zufallsfeld ist statistisch beschrieben, wenn die Mehrpunktverteilungen für beliebige n Punkte des Raumes und der Zeit bekannt sind. Also kann ein Turbulenzfeld gleichermaßen durch die zentralen Momente oder über die gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsdichten beschrieben werden. In beiden Fällen ist eine solche vollständige Beschreibung zumeist äußerst kompliziert, so dass in der Regel nur Teilaspekte erfasst werden können. Zudem hat man sich in der klassischen Turbulenzforschung lange Zeit darauf beschränkt, nur den Weg über die zentralen Momente zu gehen, wobei hier wiederum aufgrund der Komplexität lediglich niedrige Ordnungen betrachtet wurden.

In diesem Abschnitt wurde deutlich, dass selbst die schon eingeschränkte Beschreibung der Turbulenz über statistische Methoden in der Praxis immer noch zu komplex ist. Um also Erfolg in der Beschreibung einer turbulenten Strömung zu haben, müssen demnach weitere Vereinfachungen bzw. Einschränkungen, die zum Beispiel die Strömung betreffen, und auch Generalisierungen gemacht werden. Desweiteren ist, wie auch schon in der Diskussion des Schließungsproblems angedeutet, eine Modellbildung notwendig, die dann von phänomenologischer Seite eventuell Schlüsse für die konkrete Beschreibung der Turbulenz zulässt. Bei der Aufstellung dieser Modelle wird versucht, über weitergehende physikalische Überlegungen und Prinzipien zusätzliche Anhaltspunkte für die Modellierung zu bekommen.

2.3 Modellbildung in der Turbulenz

Die Modellbildung in der Turbulenz basiert hauptsächlich auf phänomenologischen Ansätzen. In diesem Abschnitt sollen die wichtigsten Konzepte der Modellbildung erörtert werden. Diese führen dann zu verschiedenen Auswertemethoden turbulenter Strömungsmessungen (Abschnitte 2.4.2 und 2.4.3). Weitere Konzepte und Modellvorstellungen sind beispielsweise in dem Buch von U. Frisch [30] beschrieben. Zunächst werden einige Vereinfachungen in Bezug auf die zu beschreibende Strömung gemacht. Dieses ist einerseits aufgrund der Komplexität der auftretenden Phänomene notwendig, andererseits kann nur so auf bekannte physikalische Zusammenhänge zurückgegriffen werden.

2.3.1 Einschränkungen der Strömungsform

Stationarität

Eine erste wesentliche Vereinfachung besteht darin, die Zeitabhängigkeit aus den Verteilungsfunktionen heraus zu nehmen. Dies kann durchgeführt werden, wenn die Strömung sich im Laufe der Zeit nicht wesentlich ändert. Man spricht dann von einer *stationären* turbulenten Strömung. Die Basisgrößen, wie zum Beispiel die Geschwindigkeit, bleiben dabei zeitabhängig, lediglich die Verteilungen und damit auch die davon abgeleiteten Größen, wie zum Beispiel Mittelwert, Schwankungsbreite usw. sind zeitunabhängig, d.h. stationär. Laborversuche erfüllen in der Regel diese Eigenschaft der Stationarität, während natürlich hervorgerufene turbulente Strömungen, wie zum Beispiel Wind oder auch Ozeanströmungen oft nicht stationär sind.

Homogenität

Zusätzlich zur Zeitvariablen können Vereinfachungen bezüglich des Feldcharakters der das turbulente Feld beschreibenden Größen durchgeführt werden. Eine turbulente Strömung wird *homogen* genannt, wenn die Verteilungsfunktionen an jedem Raumpunkt gleich ist, also $p(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)) = p(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r},t))$. Man beachte, dass dies **nicht** bedeutet, dass für alle Orte $\boldsymbol{x}$ die Gleichung $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r},t)$ gilt! Die Homogenität ist wiederum ein statistisches Kriterium. Die Vereinfachung der Annahme der Homogenität besteht darin, nicht mehr für jeden Raumpukt $\boldsymbol{x}$ den Geschwindigkeitsvektor angeben zu müssen.

Isotropie

Die *Isotropie*, als dritte Vereinfachung, betrifft den Vektorcharakter der lokalen Geschwindigkeit in der turbulenten Strömung. Sie besagt, dass, wieder im statistischen Sinne, die lokale Geschwindigkeit $\boldsymbol{u}$ invariant unter Drehung des Koordinatensystems ist. Auch dieses bringt eine enorme Vereinfachung mit sich, da man in der Beschreibung nur noch eine Komponente des Geschwindigkeitsvektors behandeln muss. Die Annahme der Isotropie und die Anwendbarkeit der darauf begründeten Turbulenzmodelle ist auch heute noch aktueller Forschungsgegenstand (siehe z.B. [34][37][63]).

Alle diese Vereinfachungen stellen gleichzeitig Idealisierungen dar, die jedoch in einer realen Strömung nur sehr schlecht erfüllt sind. So wird die Homogenität beispielsweise oft nur in sehr eng benachbarten Gebieten gelten. Allerdings sind alle diese Einschränkungen und Vereinfachungen umso besser erfüllt, je kleiner die Längenskalen sind, auf denen man die Strömung beobachtet. Man spricht auch von *lokaler* Homogenität und Isotropie, falls diese Eigenschaften nicht generell, sondern nur in einem kleinen Maßstab erfüllt sind. Ungeklärt ist dabei die Frage, bei welcher Skala für eine bestimmte Strömung diese Eigenschaften gelten.

2.3.2 Kaskadenvorstellung nach Richardson

Eine schon recht lang existierende und im Laufe der Zeit immer weiter verfeinerte Modellvorstellung in der Turbulenz ist das Bild einer *Kaskade* von Wirbeln. Sie wurde, wie im Abschitt über die spektrale Untersuchung schon erwähnt, erstmals bereits im Mittelalter durch Leonardo da Vinci angeregt. Allein durch stundenlanges Betrachten von turbulenten Strömungen kam er zu dem Schluss, dass die Vielzahl von Strukturen darin letztlich durch ineinander verschachtelte Wirbel von verschiedener Größe verursacht werden (s. Abbildung 2.1). L. F. Richardson hat diese Vorstellung in den 20er Jahren dieses Jahrhunderts wissenschaftlich wieder aufgegriffen [58].

Auf einer bestimmten Längenskala L_0, die durch die geometrischen Randbedingungen bestimmt wird, werden Wirbelstrukturen erzeugt. Es wird (pro Masseneinheit) eine bestimmte Energie ε in die Strömung gebracht. Die erzeugten Strukturen sind jedoch instabil und zerfallen in kleinere Strukturen. Dabei wird die Energie ε von der größeren zur kleineren Struktur transferiert. Abbildung 2.2 zeigt diesen Vorgang schematisch. Der Zerfall von Wirbeln geschieht bis hin zu einer kleinsten Länge, bei der der Energieübertrag aufgrund der Viskosität ν des Fluids nicht mehr stattfinden kann. Hier wird die Energie ε vollständig in Wärme umgewandelt. Diese kleinste Längenskala wird *Kolmogorov Länge* genannt und meist mit η bezeichnet. Sie hängt von

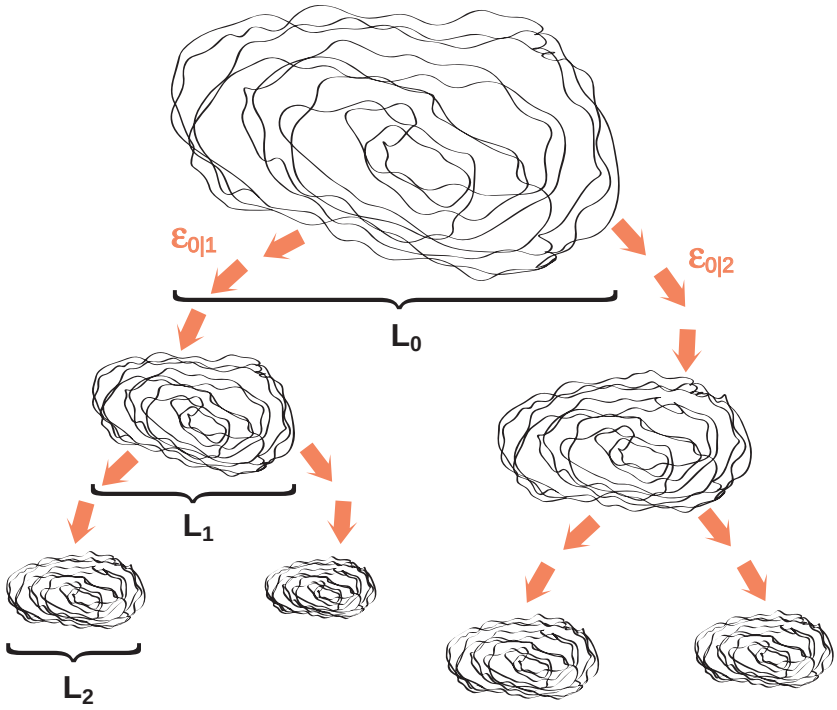


Abbildung 2.2: Schematische Darstellung der Kaskadenvorstellung von zerfallenden Wirbeln in der Turbulenz mit $L_0 > L_1 > L_2$.

der Viskosität ν ab ($\eta = \eta(\nu)$). Der Kaskadenvorgang verläuft zunächst nahezu ohne Energieverlust, wobei die Energie dabei nicht notwendigerweise zu gleichen Teilen aufgeteilt wird. Jedoch nimmt der dissipative Einfluß der Viskosität zu, je kleiner die Längenskala wird. Die Längenskala, bei der der Energieübertrag von einer Längenskala auf die nächste ebenso groß ist, wie die Energiedissipation, ist die in Abschnitt 2.2.4 beschriebene Taylorlänge. Da dieser Kaskadenvorgang in einer turbulenten Strömung ständig stattfindet, finden sich Wirbel in allen Längenskalen zwischen der Anfangslänge L_0 und einer untersten Länge η.

2.3.3 Ähnlichkeitsbetrachtung nach Kolmogorov

In den 40er Jahren dieses Jahrhunderts stellte der russische Mathematiker A. N. Kolmogorov einige Hypothesen bezüglich des Energietransports innerhalb der turbulenten Kaskade auf, aus denen er dann statistische Eigenschaften für den Spezialfall der voll entwickelten lokal isotropen Turbulenz ableiten konnte [38](Im folgenden mit Kolmogorov'41 bezeichnet). Diese Annahmen gelten umso besser, desto höher die Reynoldszahl der Strömung ist.

Die sich aus den Hypothesen ergebenden Folgerungen können dann durch Messungen an entsprechend idealen Strömungen überprüft werden, also damit

indirekt die Annahmen bestätigen. Damit sind auch schon die Hauptprobleme der Überprüfung der Kolmogorovschen Annahmen aufgezeigt: Die benötigten hohen Reynoldszahlen und die Idealität der Strömung. Dennoch sind die sogenannten *Ähnlichkeitshypothesen* ein Meilenstein in der statistischen Turbulenzforschung, und sind bis heute der wichtigste Ausgangspunkt der Turbulenzforschung. Sie werden im folgenden kurz zusammenfassend dargestellt (nach [62]).

Erste lokale Ähnlichkeitshypothese:
Die Verteilungsfunktionen $p(\boldsymbol{u})$ bei lokal isotroper Turbulenz sind durch die Energiedissipation ε und die kinematische Viskosität ν eindeutig bestimmt.

Aus Dimensionsüberlegungen folgen eindeutige Zusammenhänge der Dimensionen Länge, Zeit und damit Geschwindigkeit mit der Energiedissipation $\varepsilon[m^2/s^3]$ und der kinematischen Viskosität $\nu[m^2/s]$. Daraus ergeben sich die folgenden für die Turbulenz charakteristischen Größen:

$$\eta = \left[\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right]^{1/4} \quad (\mathrm{Kolmogorov-Länge}), \tag{2.29}$$

$$\tau_\eta = \left[\frac{\nu}{\varepsilon}\right]^{1/2} \quad \text{und} \tag{2.30}$$

$$u_\eta = (\nu\varepsilon)^{1/4} \tag{2.31}$$

Ebenfalls über Dimensionsbetrachtung erhält man einen Zusammenhang für das Energiespektrum $E(k)$, das die Einheit $[m^3/s^2]$ besitzt.

$$E(k) = \nu^{5/4}\varepsilon^{1/4}F(k\eta), \tag{2.32}$$

mit $F(k\eta)$ als zunächst noch unbestimmte dimensionslose Funktion. Zu beachten ist hierbei, dass dies nur für den Fall des statistischen Gleichgewichts gültig ist, für das man als hinreichend $L \gg 1/k \gg \eta$ annehmen muss. Für diesen Bereich, den sogenannten *Inertialbereich*, hat Kolmogorov die folgende (verschärfte) Annahme aufgestellt:

Zweite lokale Ähnlichkeitshypothese: *Wenn die Beträge von Vektoren $\boldsymbol{x}^{(i)}$ und ebenfalls deren Differenzen groß sind im Vergleich zu η und gleichzeitig klein sind zu L, dann sind die Verteilungen $p(\boldsymbol{u})$ nur abhängig von ε (und nicht mehr von ν).*

Mit dieser Hypothese ergibt sich die Form der obigen Funktion F in Gleichung 2.32 zu

$$F(k\eta) = \alpha(k\eta)^{-5/3} \tag{2.33}$$

und damit für das Energiespektrum

$$E(k) = \alpha\varepsilon^{2/3}k^{-5/3}, \tag{2.34}$$

wobei α eine universelle Konstante ist, die experimentell bestimmt werden muss. Dazu sind Strömungen nötig, in denen das Gesetz (2.34) über einen weiten Wellenzahlenbereich erfüllt sein muss, der durch die Voraussetzungen der zweiten Ähnlichkeitshypothese nur bei einem äußerst großen Unterschied von L zu η gegeben ist. Der Wert von α wurde beispielsweise von Grant et al. [33] in einer Gezeitenströmung zu

$$\alpha = 1,44 \pm 0,01 \tag{2.35}$$

bestimmt, wobei sich der Wertebereich von k über 3 Zehnerpotenzen erstreckte.

2.4 Statistik in der turbulenten Kaskade

2.4.1 Das Geschwindigkeitsinkrement

Ist man gemäß der Reynoldschen Darstellung der turbulenten Strömung durch den Mittelwert und Schwankung um diesen an der Statistik der Schwankungen interessiert und betrachtet dieses mit der hier geschilderten Kaskadenvorstellung, so führt das auf den in der Turbulenzforschung sehr wichtigen Begriff des *Geschwindigkeitsinkrements*. Es ist durch

$$\boldsymbol{v_r}(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \tag{2.36}$$

definiert und beschreibt den Geschwindigkeitsunterschied der lokalen Geschwindigkeit $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ zu der Geschwindigkeit $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})$ an einem um $\boldsymbol{r}$ verschobenen Ort. Der Abstandsvektor $\boldsymbol{r}$ kann dabei in beliebiger Richtung zu $\boldsymbol{u}$ bzw. zu $\boldsymbol{v}$ stehen. Der Spezialfall bei paralleler Ausrichtung wird *longitudinales,* der bei bei senkrechter Ausrichtung *transversales Inkrement* genannt.[4]

Mit dieser soeben definierten neuen Größe des Geschwindigkeitsinkrements $\boldsymbol{v_r}$ kann man nun, wie für die Geschwindigkeit $\boldsymbol{u}$ selber, Statistik betreiben. Die Geschwindigkeitsinkremente haben eine gewisse Verteilung $p(\boldsymbol{v_r}(\boldsymbol{x}),t) \equiv p(\boldsymbol{v},\boldsymbol{x},\boldsymbol{r},t)$, die nun aufgrund der Definition des Geschwindigkeitsinkrementes von der Distanz $\boldsymbol{r}$ abhängt, über die das Inkrement gebildet wird. Für eine stationäre und homogene Strömung entfällt die Abhängigkeit dieser Verteilung von t und $\boldsymbol{x}$. Zusätzlich entfällt bei einer isotropen Strömung die Abhängigkeit des Geschwindigkeitsinkrements $\boldsymbol{v_r}$ von der Richtung von $\boldsymbol{r}$, so dass dann beispielsweise die Verteilungen von longitudinal und transversal gebildeten Inkrementen übereinstimmen. Dies kann auch als Test der Isotropie bzw. des Gültigkeitsbereichs bei lokaler Isotropie herangezogen werden.

[4] Man verwechsele dies nicht mit der longitudinalen bzw. den transversalen Komponenten.

2.4.2 Die Strukturfunktion und Momentenanalyse

Eine besondere Beachtung finden in der Turbulenzforschung die Momente der Geschwindigkeitsinkremente. Diese werden analog zu Gleichung (2.13) durch

$$S_v^n(r) = \langle\, v(r)^n \,\rangle \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} v^n \, p(v,r)\, dv \;, \tag{2.37}$$

mit ganzzahligem n definiert und als *Strukturfunktionen n-ter Ordnung* bezeichnet.

Die einzige Voraussage über das Verhalten der Strukturfunktionen, die direkt aus den Strömungsgleichungen (2.2) abgeleitet werden kann, ist die sogenannte *Kolmogorov-Gleichung*

$$< S_v^3(r) >= -\frac{4}{5}\varepsilon r + 6\nu \frac{\partial S_v^2(r)}{\partial r}. \tag{2.38}$$

Da in der Praxis die ungeraden Momente numerisch recht instabil sind, werden oft die folgendermaßen definierten *Betragsmomente*, die zumeist mit T bezeichnet werden, benutzt:

$$T_v^n(r) \;=\; \langle\, |v(r)|^n \,\rangle \;=\; \int_{0}^{+\infty} v^n \;\{\, p(v,r) + p(-v,r) \,\}\; dv \tag{2.39}$$

Eine theoretisch motivierte Begründung dazu gibt es leider nicht [10].

Für den Grenzfall unendlich hoher Reynoldszahl weist die Navier-Stokes-Gleichung (2.2), da in diesem Fall der Dissipationsterm vernachlässigt werden kann, eine besondere Eigenschaft bezüglich der Längenskala r auf, die vor allem in der Chaostheorie bekannt geworden ist. Sie ist selbstähnlich. Das heißt, bei Änderung des Längenmaßstabs r erhält man eine ähnliche Gleichung, die feste Potenzen von r beinhaltet. Gleiches erwartet man aufgrund ihrer Definition (2.37) von den Strukturfuntionen. Der allgemeine Zusammenhang $< v(\alpha r)^n >= \alpha^{\zeta_n} < v(r)^n >$ motiviert für diesen Fall die Gleichung

$$< v(r)^n >= (\frac{r}{r_1})^{\zeta_n} < v(r_1)^n > . \tag{2.40}$$

Die Proportionalität der Strukturfunktion mit einer bestimmten Potenz von r, die oft mit ζ_n bezeichnet wird, wird *Skalierung* der Strukturfunktion genannt. Für den sogenannten *Skalenexponenten* ζ_n gibt es Voraussagen, die aus den oben besprochenen Näherungen und Modellvorstellungen abgeleitet werden. Sie sind also streng genommen nur für den sehr idealisierten und damit

theoretischen Fall der stationären, vollentwickelten, homogenen und isotropen Turbulenz bei unendlich hoher Reynoldszahl gültig.

Aus den oben besprochenen Ähnlichkeitshypothesen von Kolmogorov kann über Dimensionsbetrachtungen folgender Skalenexponent abgeleitet werden:

$$\zeta_n = \frac{1}{3}n. \tag{2.41}$$

Dieser besitzt, da aus den gleichen Voraussetzungen gewonnen, die selben Einschränkungen wie die Skalierung des Energiespektrums in Gleichung (2.34). In der Tat sind diese beiden Aussagen äquivalent. Es gilt

$$S^2 \sim r^\alpha \iff P(k) \sim k^{-(\alpha+1)}. \tag{2.42}$$

Eine Erweiterung dieses einfachen Skalengesetzes, die ebenfalls auf Kolmogorov zurückgeht und 1962 von ihm vorgestellt wurde (siehe [39]), beruht auf der Berücksichtigung der sogenannten *Intermittenz* des Energietransfers. Diese besagt, dass der Energieübertrag ε in der turbulenten Kaskade nicht mehr als konstant betrachtet wird. Die Enegie verteilt sich nun beim Übergang von der größeren auf eine kleinere Längenskala statistisch auf die kleineren Wirbel. Der Energietransfer wird also jetzt als ein statistischer Prozess betrachtet. Der Prozess des Enegieübertrags ist jedoch nicht normalverteilt, sondern genügt stattdessen einer *Log-Normalverteilung*

$$P(\varepsilon) = \exp\left(-\frac{\ln^2(\varepsilon/\varepsilon_0)}{2\Lambda^2}\right) \tag{2.43}$$

mit Λ als Standardabweichung. Es ergibt sich dadurch eine Korrektur Δ_n im Skalenexponent ζ_n. Man erhält:

$$\zeta_n = \frac{n}{3} + \Delta_n \text{ , mit} \tag{2.44}$$

$$\Delta_n = -\frac{\mu}{18}n(n-3), \tag{2.45}$$

wobei μ einen sogenannten *Intermittenzfaktor* darstellt. Der Skalenexponent n ist nunmehr nichtlinear in n. In dem angedeuteten Bild aus der nichtlinearen Dynamik entspricht dieses einem *multifraktalen* Verhalten, das durch die Strukturfunktion beschrieben wird. Der Wert für den Intermittenzfaktor μ ist theoretisch nicht abzuleiten. Experimentell werden Werte um $\mu = 0,2$ gefunden (z.B. [2]). Im Rahmen der Auswertung der Messdaten in Kapitel 3 werden dazu unterschiedliche Werte für die einzelnen Komponenten gefunden (siehe Abschnitt 3.2.3).

Erweiterte Momentenanalyse(ESS)

In der Praxis zeigt sich, dass der Skalierungsbereich der Strukturfunktionen bei Strömungen mit Reynoldszahlen $R_\lambda < 1000$ recht klein ist. Damit wird die Bestimmung der Skalenexponenten schwierig und birgt eine recht große Unsicherheit. Benzi et al. haben in [10] und [11] eine Methode vorgeschlagen, die die Bestimmung der Skalenexponenten verbessert. Diese Methode ist zwar noch nicht theoretisch begründbar [67], hat sich aber in der Praxis in den letzten Jahren im Rahmen der Momentenanalyse bewährt. Ziel ist es, den Skalierungsbereich zu erweitern. Die Methode sei hier nur kurz gemäß [67] beschrieben. Näheres kann in den angegebenen Literaturstellen nachgelesen werden.

Auf empirischem Wege wurde gefunden, dass die Strukturfunktionen folgender Beziehung genügen:

$$< v(r)^n >= C_n U^n \left[\frac{r}{L} f(r/\eta)\right]^{\zeta_n}, \tag{2.46}$$

wobei C_n einen konstanten Faktor und U eine charakteristische Geschwindigkeit bezeichnet. L und η stehen für die Integrale bzw. die Kolmogorov-Länge. Die Funktion $f(r/\eta)$ ist universell und kann aus der Kolmogorov-Gleichung (2.38) berechnet werden. Der Gültigkeitsbereich von Gleichung (2.46) ist weit größer als der Skalierungsbereich der Strukturfunktion selber. Daher wurde für diese Bestimmungsmethode der Skalenexponenten der Name *'extended selfsimilarity'* oder kurz *ESS* gewählt. Da die Funktion $f(r/\eta)$ universell ist, kann nun aus der doppellogarithmischen Auftragung zweier Strukturfunktionen (etwa der Ordnung n und n') das Verhältnis der Skalenexponenten $\zeta_n/\zeta_{n'}$ bestimmt werden.

Aus Gleichung (2.44) folgt unmittelbar, dass der Skalenexponent ζ_n für $n = 3$ den Wert $\zeta_3 = 1$ hat. Man nimmt demnach gerne S^3 als Bezug, da in diesem Fall die Steigung des linearen Bereichs der doppellogarithmischen Darstellung einer Strukturfunktion S^n gegenüber S^3 direkt den Skalenexponenten ζ_n ergibt. Experimente zeigen, dass $|S^3| \propto T^3$ gilt. Eine theoretische Begründung für diesen Zusammenhang fehlt bislang. Aufgrund der oben bereits angesprochenen besseren numerischen Stabilität wird im allgemeinen T^3 statt S^3 verwendet. Beispiele zu Auswertungen mittels dieser Methode werden in späteren Abschnitten (z.B. 3.2.3 oder 3.3.3) gezeigt.

Eine Schwierigkeit der Momentenanalyse ist, dass keine Voraussagen über das Verhalten der Strukturfunktionen direkt aus den Strömungsgleichungen abgeleitet werden können. Weiterhin sind sämtliche Aussagen, die man experimentell überprüfen kann, an die Eigenschaft der Skalierung gebunden, die allerdings nur vage theoretisch begründet ist und auch nur für sehr stark idealisierte Strömungen, insbesondere solche mit hoher Reynoldszahl, gültig ist.

Die Strukturfunktionen sind nach Definition die n-ten Momente der Verteilungen der Geschwindigkeitsinkremente v_r. Wie in Abschnit 2.2.2 besprochen, benötigt man für eine vollständige Charakterisierung der zugrunde liegenden Verteilungen die Momente sämtlicher Ordnungen. Die Momente hoher Ordnung $(n > 6)$ sind jedoch aus statistischen Gründen nur mit großen Unsicherheiten zu bestimmen. Die statistische Reliabilität ist zu gering, da zum Beispiel einzelne seltene Ereignisse durch die hohe Potenz, mit der sie eingehen, das Ergebnis stark verfälschen können.

Aufgrund dieser Schwierigkeiten ist es lohnend einen Blick direkt auf die Verteilungen der Inkremente zu werfen.

2.4.3 Die Verteilungen der Inkremente

Wie für die Strukturfunktionen, so gibt es auch für die Form der Inkrementverteilungen noch keine Voraussagen, die direkt aus den Strömungsgleichungen folgen. Am weitesten entwickelt ist momentan eine Modellierung der Verteilungsfunktionen für die Geschwindigkeitsinkremente, die von Castaing et al. [20] vorgeschlagen wurde. Dies ist ein phänomenologischer, halbempirischer Ansatz, der versucht, das unterschiedliche Verhalten der Verteilungsfunktionen auf den verschiedenen Längenskalen zu beschreiben.

Ausgangspunkt ist die Annahme, dass die Verteilungsfunktion der Geschwindigkeitsinkremente v_r bei (für eine Längenskala r) konstanter Energietransferrate ε_r einer Normalverteilung gehorcht. Es soll also damit gelten

$$P_{\varepsilon_r}(v_r) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{v_r^2}{2\sigma^2}\right), \tag{2.47}$$

mit der Standardabweichung σ, die wiederum von ε abhängt. Diese Abhängigkeit ergibt sich aus Dimensionsgründen zu

$$\sigma(\varepsilon) = (\varepsilon r)^{1/3}. \tag{2.48}$$

Der oben schon erwähnten Verfeinerung der Ähnlichkeitsbetrachtungen durch Kolmogorov von 1962 folgend, wird nun für ε, und damit auch für die Standardabweichung σ, eine Log-Normalverteilung angenommen.

$$Q_{\tilde{\lambda}}(\sigma)d\sigma = \frac{1}{\tilde{\lambda}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\ln^2(\sigma/\sigma_0)}{2\tilde{\lambda}^2}\right) d\ln\sigma \tag{2.49}$$

Dieses spiegelt den intermittenten Charakter wider, dessen Stärke durch den Parameter $\tilde{\lambda}$ wiedergegeben wird. σ_0 ist dabei die wahrscheinlichste Standard-

abweichung von v_r. Aus diesen Annahmen ergibt sich für die Inkrementverteilung

$$P(v) = \frac{1}{2\pi\tilde{\lambda}} \int \exp\left(-\frac{\ln^2(\sigma/\sigma_0)}{2\tilde{\lambda}^2}\right) \exp\left(-\frac{v_r^2}{2\sigma^2}(1+\gamma)\right) \frac{d\ln\sigma}{\sigma} \tag{2.50}$$

Dabei ist $(1+\gamma)$ ein zusätzlich eingeführter Faktor, der die beobachtete Asymmetrie berücksichtigt. Genauer ist γ durch

$$\gamma = a_s \frac{v/\sigma}{\sqrt{1-(v/\sigma)^2}} \tag{2.51}$$

gegeben. Der Faktor a_s wird *skewness-factor* genannt und ist rein empirischer Natur. Er kann daher auch nur experimentell bestimmt werden. Für die longitudinale Komponente des Geschwindigkeitsvektors wurde $a_s = 0,18$ ermittelt [20]. Dieser Wert konnte durch die in dieser Arbeit durchgeführten Auswertungen (siehe Kapitel 3.2.3 bzw. 3.3.3) bestätigt werden. Im Vorgriff auf das folgende Kapitel sei an dieser Stelle erwähnt, dass für die transversale Komponente der Geschwindigkeit die Verteilungen symmetrisch sind und damit der Asymmetriefaktor a_s verschwindet.

Interpretieren lässt sich Gleichung (2.50) als Überlagerung von Gaußverteilungen mit verschiedener Varianz, die durch $\tilde{\lambda}$ bestimmt ist. Damit gibt der Parameter $\tilde{\lambda}$ die Form der Verteilung an und wird daher auch *Formparameter* genannt. Desweiteren ist $\tilde{\lambda}$ von der Längenskala r abhängig und es stellt sich die Frage nach einer Vorhersage für den Verlauf von $\tilde{\lambda}(r)$ und ebenso nach einer physikalischen Interpretation von $\tilde{\lambda}(r)$.

Aus Gleichung (2.50) ergeben sich die Zusammenhänge

$$\sigma^2 = \left\langle v^2 \right\rangle_\varepsilon \quad \text{und} \tag{2.52}$$

$$\tilde{\lambda}^2 = \left\langle \ln^2 \sigma \right\rangle. \tag{2.53}$$

Desweiteren ist nach den Ähnlichkeitshypothesen Kolmogorovs von 1941 (siehe auch Abschnitt 2.3.3) $\langle v_r^2 \rangle = \varepsilon r^{2/3}$. Damit ergibt sich

$$\left\langle \ln^2 \varepsilon \right\rangle = 9\tilde{\lambda}^2. \tag{2.54}$$

Berücksichtigt man nun die Erweiterung von Kolmogorov und Obukhov aus dem Jahre 1962 [39], so erhält man

$$9\tilde{\lambda}^2 = \tilde{\lambda}_0^2 - \mu \ln r \tag{2.55}$$

eine logarithmische Abhängigkeit von $\tilde{\lambda}^2$ von r mit $\tilde{\lambda}_0^2$ als konstanten Offset. Gemäß der Voraussetzungen der Komolgorovschen Hypothesen gilt dieser

Zusammenhang für $L \gg r \gg \eta$ in vollentwickelter homogener und isotroper Turbulenz. Experimentell wird diese Beziehung (2.55) für einen bestimmten Längenskalenbereich innerhalb des Inertialbereiches recht gut bestätigt (s. Kapitel 3). Desweiteren wurde auf experimentellem Wege für r etwas kleiner, als der Gültigkeitsbereich von Gleichung (2.55), aber immer noch größer als η, folgende Proportionalität gefunden:

$$\tilde{\lambda}^2 \propto \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\beta}, \tag{2.56}$$

wobei der Skalenexponent β bei steigender Reynoldszahl abnimmt. Das Auftreten dieses Bereiches wirft prinzipielle Fragen der Skalierung der Strukturfunktionen auf, da dieses Potenzgesetz für $\tilde{\lambda}$ im Widerspruch zu einer Skalierung der Strukturfunktion steht. Es ist noch ein ungeklärter Punkt, welche Ausdehnung diese beiden Bereiche von $\tilde{\lambda}(r)$ haben und wie sie theoretisch begründet werden können. Beispiele zur Castaing-Analyse und zu diesen besonderen Bereichen von $\tilde{\lambda}(r)$ sind im Zusammenhang mit der Analyse der Messdaten aufgeführt. Siehe dazu die Abschnitte 3.2.3 und 3.3.3.

Mit der Bestimmung von $\tilde{\lambda}(r)$, die allerdings voraussetzt, dass die Inkremente Log-Normalverteilt sind, hat man die Verteilungen der Geschwindigkeitsinkremente für die verschiedenen Längenskalen charakterisiert. Damit können wiederum Rückschlüsse auf die Strukturfunktionen gemacht werden, die sich aus den Verteilungen berechnen lassen (s. Abschnitt 2.2.2.). Interessant ist hierbei, dass der Zusammenhang (2.55) zu einem Skalenverhalten führt und man so die Skalenindizes bestimmen kann, während (2.56) kein Skalenverhalten der Momente zulässt. Damit stellt diese $\tilde{\lambda}^2$*-Analyse*, wie sie auch genannt wird, eine Erweiterung zur Momentenanalyse dar, da dort lediglich Skalenverhalten untersucht wird.

Kapitel 3

Experimente

Dieses Kapitel beschreibt zunächst die experimentellen Bedingungen der durchgeführten Messreihen. Im Anschluss daran werden die zwei untersuchten Strömungsformen (Gitter- bzw. Zylindernachlauf) beschrieben und jeweils exemplarisch die Auswertungen der Messungen anhand der im vorigen Kapitel beschriebenen Methoden dargestellt.

3.1 Aufbau und Durchführung

3.1.1 Windkanal

Die Experimente wurden an dem großen Windkanal des Lehrstuhls für Strömungsmechanik der Universität zu Erlangen durchgeführt. Es handelt sich hierbei um einen 400-kW-Niedriggeschwindigkeitswindkanal der sogenannten Göttinger Bauart. Die nutzbare Messstrecke ist ca. $2\,m$ lang bei einem Querschnitt von ca. $1,9\,m$ mal $1,4\,m$. Ein Photo der mit einem Holzverschlag geschlossenen Messstrecke zeigt Abbildung 3.1. Der Windkanal kann Strömungsgeschwindigkeiten von über $50\,m/s$ erzeugen, wobei er bei den im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Experimente bis maximal $45\,m/s$ betrieben wurde.

Diese Beschränkung ist durch die folgenden Bedingungen gegeben. Da gerade die kleinskaligen Fluktuationen für die Statistische Auswertung (s. Einleitung) von großem Interesse sind, müssen bei hohen Geschwindigkeiten immer höhere Frequenzen ($> 150\,kHz$) gemessen werden. Diese können sowohl von der Datenerfassung, als auch durch den Messsensor selbst nicht mehr erfasst werden. Bei diesen hohen Windgeschwindigkeiten ($> 45\,m/s$) reicht zudem die Temperaturregelung des Windkanals nicht mehr aus, um eine konstante Temperatur zu gewährleisten. Durch die ansteigende Temperatur wird das Signal des Sensors aufgrund des Messprinzips (s. u.) zu stark verfälscht.

Einer Vergrößerung der Strukturen durch Vergrößern der Geometrie der turbulenzerzeugenden Hindernisse steht die begrenzte Messstrecke entgegen,

weil sich die Turbulenz hinter dem Hindernis erst entwickeln muss. Auch waren höhere Windgeschwindigkeiten nicht sinnvoll, da das Hauptinteresse der Untersuchungen auf dem Bereich der kleinskaligen Turbulenz liegt, und die zeitliche Auflösung durch das Messprinzip der Hitzdrahtanemometrie und die Messdatenerfassung begrenzt ist.

Um die Hitzdrahtsonden in der Strömung zu positionieren, ist eine computergesteuerte Traversierung vorhanden mit deren Hilfe die Position der Sonden in alle drei Raumrichtungen variiert werden kann. Die Positionsgenauigkeit der Traversierung ist besser als ein Millimeter und damit kleiner als die Auflösung der Sensoren (s.u.).

Desweiteren zeichnet sich der Windkanal durch eine sehr homogene Strömung mit einem äußerst niedrigen Turbulenzgrad von unter 0,1 % aus. Dieses wurde durch Schließen der Messstrecke mit einer Holzkonstruktion erreicht (siehe Abbildung 3.1).

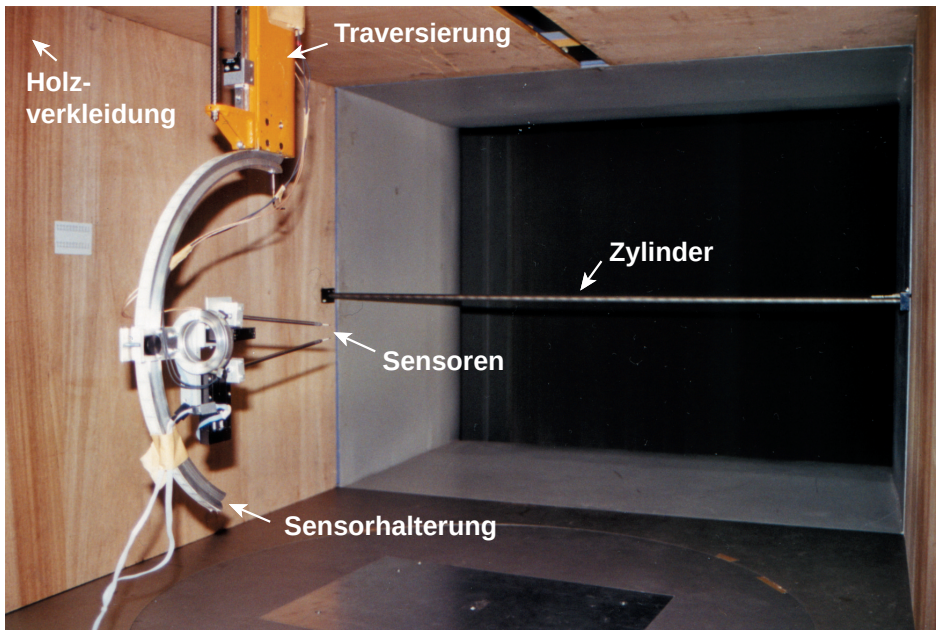


Abbildung 3.1: Geschlossene Messstrecke des verwendeten Windkanals mit Sondenhalterung und Traversierung.

3.1.2 Versuchsaufbau

Um sich den beschriebenen Fragestellungen auf experimentellem Wege zu nähern, ist es (zunächst einmal) notwendig, relativ einfache und auch bekannte Strömungen zu wählen. Ferner sollen es verschiedene Strömungen sein, damit auch das Problem von universellen Größen in der Turbulenz untersucht

werden kann. Die Wahl fiel dabei auf die Nachlaufströmungen eines Gitters und eines Zylinders. Es wurde einige Zentimeter nach der Kontraktionsstrecke des Windkanals ein Gitter oder ein starrer Zylinder angebracht (siehe Abbildung 3.2).

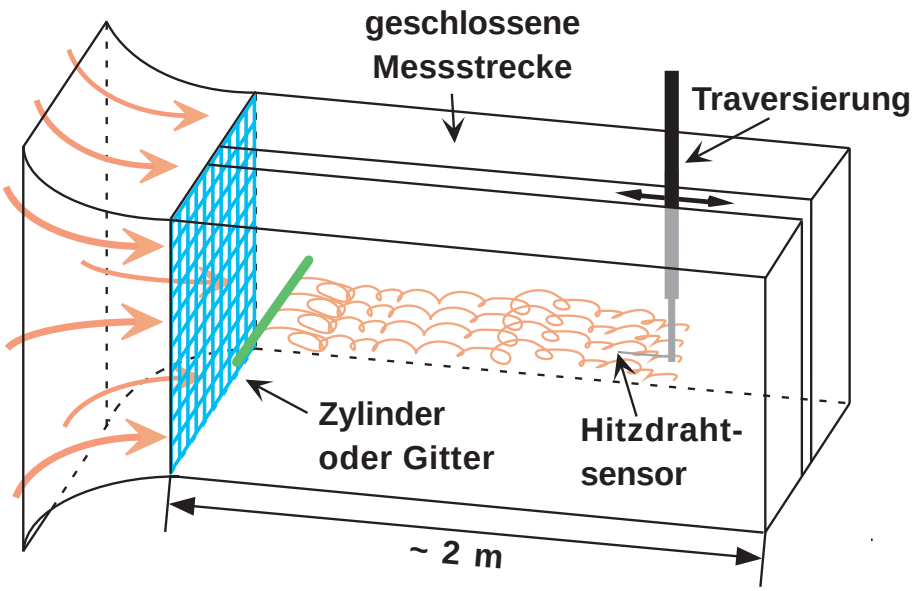


Abbildung 3.2: Skizze des Versuchsaufbaus.

Das verwendete Gitter wurde aus einer $3\,mm$ dicken Stahlplatte ausgestanzt und besitzt eine Maschenweite von $5\,cm$ bei einer Stegbreite von $1\,cm$. Es wurde zwischen der Austrittsöffnung der Kontraktionsdüse und der Holzverkleidung eingespannt. Als Zylinder wurden zwei Stahlrohre mit den Durchmessern $5\,cm$ bzw. $2\,cm$ verwendet und jeweils über eine angeschweißte Stahlplatte an die Holzverkleidung angeschraubt.

Eine genaue Beschreibung der einzelnen Versuche erfolgt in den Kapiteln 3.2 und 3.3.

3.1.3 Messtechnik

Da für die Analyse der kleinskaligen Turbulenz örtlich und zeitlich hochaufgelöste Datensätze benötigt werden, ist als Messverfahren die Hitzdrahtanemometrie verwendet worden. Der Hauptgrund für diese Wahl ist die benötigte räumliche und zeitliche Auflösung, sowie das für die Statistik benötigte Datenvolumen. Andere Messverfahren, wie Laser-Doppler-Anemometrie (LDA), Ultraschall oder Partikel-Imaging-Velocimetrie (PIV) erlauben zwar ein berührungsfreies Messen, besitzen aber eine deutlich geringere räumliche und zeitliche Auflösung. Mit diesen Verfahren können beim heutigen Stand

der Technik die angesprochenen Fragen, die eine vollständige Erfassung des Inertialbereiches bei hohen Reynoldszahlen verlangen, nicht untersucht werden.

Hitzdrahtanemometrie

Bei der Hitzdrahtanemometrie wird die örtliche Geschwindigkeit mittels eines kleinen Drahtes gemessen, der in die Strömung gehalten und durch einen kleinen elektrischen Strom geheizt wird. Das Fluid, hier Luft, umströmt diesen Draht aufgrund seiner kleinen Abmessungen laminar[1] und bewirkt so einen von der Geschwindigkeit abhängigen Abtransport der Wärme. Da der elektrische Widerstand des Drahtes temperaturabhängig ist, kann nun über eine auf dem Prinzip einer Wheatstoneschen Brücke basierenden Messschaltung diese Kühlrate indirekt gemessen werden.

Für die hier beschriebenen Messungen wurde ein kommerzielles Hitzdrahtanemometer des Typs Streamline 90N10 der Firma Dantec-Invent verwendet. Dieses Anemometer besitzt einige wichtige Vorzüge. Die Messbrücke lässt sich gut an gegebene Verhältnisse wie Kabellängen und deren Impedanzen anpassen, besitzt eine äußerst geringe eigene Drift, sowie eingebaute rauscharme Verstärker mit Signalkonditionier-Einheit. Diese Faktoren garantieren eine gute Signalqualität auch im oberen Frequenzbereich, was, wie schon beschrieben, für die Fluktuationen auf kleinen Skalen wichtig ist.

Sonden und Sondenhalterung

Als Hitzdrahtsensoren wurden sowohl Eindraht-, als auch X-Draht-Sonden verwendet. Bei den Eindraht-Sonden wird näherungsweise ein Betrag der Geschwindigkeitskomponenten der beiden senkrecht zum Draht stehenden Raumrichtungen gemessen. Sie bieten den Vorteil einer leichten Handhabbarkeit mit relativ geringem Kalibrieraufwand (s. u.) sowie kleinerer Abmessungen und somit einer höheren Ortsauflösung, was für die kleinskaligen Fluktuationen von Bedeutung ist. Zusätzlich können bei der Messung mit Eindrahtsonden höhere Windgeschwindigkeiten genutzt werden, da bei nur einem Messkanal die Aufnahmerate des AD-Wandlers voll ausgenutzt werden kann (s. u.).

Verwendet wurden kommerzielle Eindrahtsonden der Firmen Dantec (Typ: 55P11) und Auspex Corp. (Sonderanfertigung). In beiden Fällen handelt es sich

[1] Die lokale Reynoldszahl ist bei $30\,m/s$ $Re \approx 10$ (Drahtdurchmesser $\approx 10\mu m$) und damit unterhalb der Schwelle für eine turbulente Ablösung von Wirbeln um einen zylindrischen Körper.

um platinbeschichtete Wolframdrähte, bei denen die Platinschicht im messempfindlichen Teil weggeätzt wurde. Diese sogenannte sensitive Länge beträgt bei der Sonde von Dantec ca. $1,25\ mm$ und bei dem Sensor von Auspex ca. $0,5\ mm$. Dabei haben die Sensoren einen Drahtdurchmesser von ca. $5\ \mu m$ bei Dantec und ca. $2,5\ \mu m$ bei Auspex.

Um Untersuchungen über Isotropieeigenschaften einer Strömung durchführen zu können, sind Messungen der einzelnen Komponenten des lokalen Geschwindigkeitsvektors nötig. Alle drei Geschwindigkeitskomponenten können simultan mit 3-Draht-Sonden, die eine komplizierte räumliche Anordnung von drei Hitzdrähten besitzen, gemessen werden. Leider verringern sich hierbei sowohl die räumliche Auflösung, da die Drähte einen Mindestabstand zueinander haben müssen, als auch die zeitliche Auflösung, da hierbei natürlich 3 Kanäle simultan aufgenommen werden müssen. Da zudem noch Korrelationsmessungen mit zwei Sonden in verschiedenen Abständen zueinander durchgeführt werden sollten, verwendet. Mit diesen sind zwei Komponenten des Geschwindigkeitsvektors gleichzeitig messbar. Die dritte Komponente kann in einer zweiten Messung durch Drehen des Sensors um 90 Grad ebenfalls erhalten werden. Für statistische Untersuchungen bedeutet das jedoch keine allzu große Einschränkung.

Bei einem X-Draht-Sensor sind zwei Hitzdrähte in Form eines 'X' zueinander angeordnet. Um eine Signalvermischung durch die von einem Draht auf den anderen übertragene Wärme zu vermeiden, besitzen die Drähte einen Abstand von ca. $1\ mm$. Über ein spezielles Kalibrierverfahren, das im nächsten Abschnitt erläutert wird, erhält man die beiden Geschwindigkeitskomponenten, die in der von den Drähten aufgespannten Ebene liegen. Zhu und Antonia untersuchten den Effekt, den der Abstand der beiden Drähte, auf die Messung der Reynoldschen Spannungen haben[77]. Diese Effekte sind besonders bei der Bestimmung der Reynoldsspannungen über Messungen mit mehreren X-Draht Sonden zu berücksichtigen.

In dieser Arbeit werden diese Effekte nicht berücksichtigt, da hier die Messungen mit einzelnen X-Draht Sonden diskutiert werden und desweiteren sich die in [77] vorgeschlagenen Korrekturen auf zeitlich gemittelte Größen beziehen, hier jedoch die Statistik der kleinskaligen Turbulenz betrachtet wird. Die hier besprochenen Messungen erfolgten mit Sonden vom Typ 55P61 und 55P51 der Firma Dantec sowie mit einer endbeschichteten Sonde AHWX-100 der Firma Auspex Corp. Bei beiden Fabrikaten beträgt der Drahtdurchmesser $5\ \mu m$. Die sensitive Länge beträgt ca. $1,25\ mm$.

Für das oben angesprochene Kalibrierverfahren für die X-Draht Sensoren ist eine Halterung der Sonden in der Strömung nötig, bei der man den Anstellwinkel der Sensoren zur Strömung verändern kann. Eine Skizze der im LSTM-Erlangen konstruierten Sondenhalterung ist in Abbildung 3.3 dargestellt.

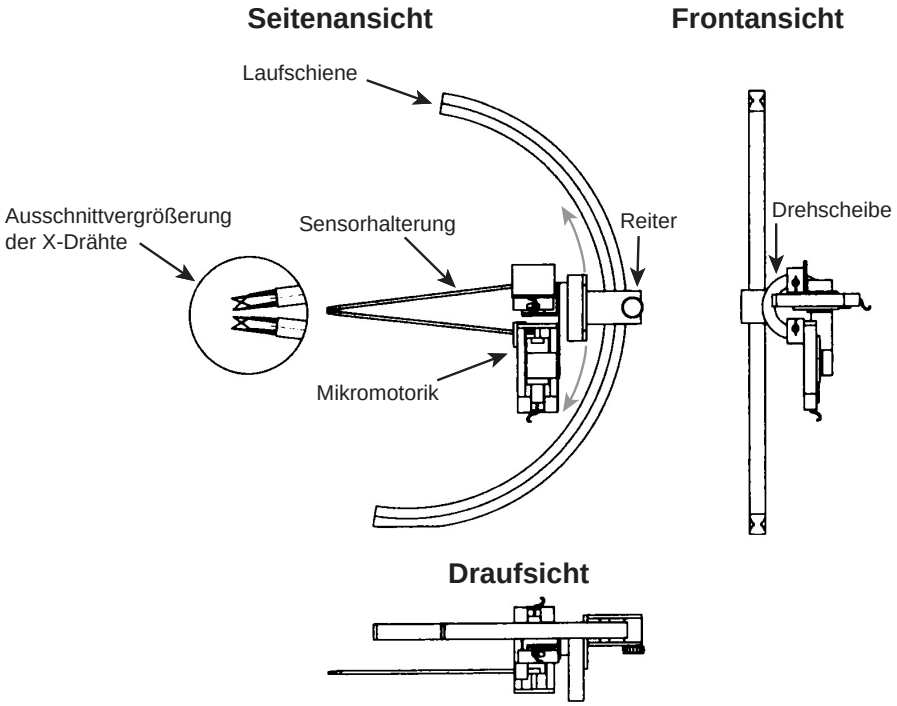


Abbildung 3.3: Zeichnung der Sondenhalterung, die mit zwei X-Draht Sensoren bestückt ist.

Die Halterung kann mit ein oder zwei Hitzdrahtsonden bestückt werden, wobei der Sondenabstand bei Verwendung zweier Sonden über eine mit Schrittmotoren gesteuerte Mikromotorik in zwei Richtungen mit einer Genauigkeit besser als $10\,\mu m$ eingestellt werden kann. Der maximale Bereich beträgt dabei ca. $1,9\,cm$. Diese Justiervorrichtung befindet sich auf einem Reiter, der auf einer halbkreisförmigen Schiene befestigt wird. Durch Verschieben des Reiters auf der Schiene kann der Einstellwinkel der Sondenanordnung mit einer Genauigkeit von ca. 0,2 Grad eingestellt werden. Zusätzlich lassen sich noch die Hitzdrähte mittels einer Art Drehscheibe um die longitudinale Achse drehen, um so z. B. bei einer X-Draht Sonde die dritte Geschwindigkeitskomponente zu erhalten. Zur Kontrolle der absoluten Lage der Sonden in der Strömung, sowie zur Messung der Sondenabstände bei der Bestückung mit zwei Sensoren, wurde ein Mikroskop verwendet.

Aufgrund der geometrischen Abmessungen der Sondenarme konnten die gewünschten kleinen Abstände zweier Sensoren von etwa $1\,mm$ nur dadurch erreicht werden, dass diese in einem leichten Winkel von 6 Grad untereinander angestellt wurden. Man kann diese Notwendigkeit im rechten Teil von Abbildung 3.4 b) erkennen. Dadurch ergibt sich vor allem bei den X-Draht Sonden eine etwas schlechtere Richtungsgenauigkeit, da sich damit höhere Anstellwinkel zur Hauptwindrichtung ergeben.

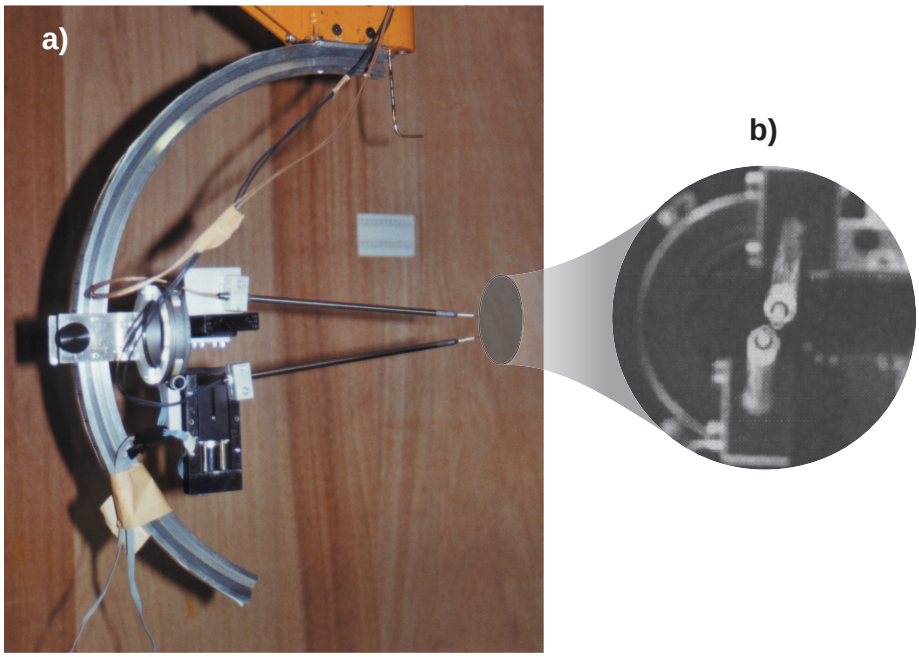


Abbildung 3.4: Foto der eingebauten Hitzdrahthalterung mit zwei X-Draht Sensoren a) und einer Ausschittvergrößerung b).

Kalibrierung

Um von den Spannungen, die das Anemometer ausgibt, auf die Strömungsgeschwindigkeit rückschließen zu können, muss zunächst eine Kalibrierung des jeweiligen Hitzdrahtes durchgeführt werden. Durch die Kalibrierung werden die Parameter bestimmt, die für die Umrechnung der Spannung in die Geschwindigkeit benötigt werden. Da die Parameter durch das Messprinzip (s.o.) außer vom verwendeten Hitzdraht auch stark von den Umgebungsbedingungen abhängig sind, ist es notwendig, diese Parameter für jede Messreihe neu zu bestimmen. Die beste Genauigkeit erreicht man bei der Kalibrierung in laminarer Strömung. Deshalb wurden die Sensoren für alle Kalibrierungen mittels der Traversierung in einen Bereich oberhalb des Zylindernachlaufs oder bei der Gitterströmung durch eine Gittermasche hindurch in den laminaren Bereich vor dem Gitter positioniert.

Bei Eindrahtsonden beschränkt sich die Kalibrierung auf die Geschwindigkeit selber, solange der Anstellwinkel des Drahtes in der Strömung nicht verändert wird, der senkrecht zur Hauptströmungsrichtung gewählt werden sollte. Man bestimmt hierbei die Anemometer-Spannung für verschiedene Windgeschwindigkeiten. Um eine höhere Genauigkeit zu erzielen wurden stets Messwerte über einige Sekunden aufgenommen und gemittelt, wobei dabei auf Konstanz von Temperatur und Windgeschwindigkeit geachtet wurde. Das Kingssche Gesetz gibt folgende Abhängigkeit der Anemometer-Spannungen

U von den Windgeschwindigkeiten v an.

$$U = A + Bv^n \tag{3.1}$$

wobei A, B, n die anzupassenden Parameter sind. Für den Parameter n wird in der Regel ein Wert zwischen 3 und 4 erwartet. Abbildung 3.5 zeigt zwei typische Kalibrierungskurven mit der Anpassung nach King (3.1) für eine Eindraht-Sonde in Teil a), sowie nach Gleichung (3.4) für einen X-Draht in Teil b).

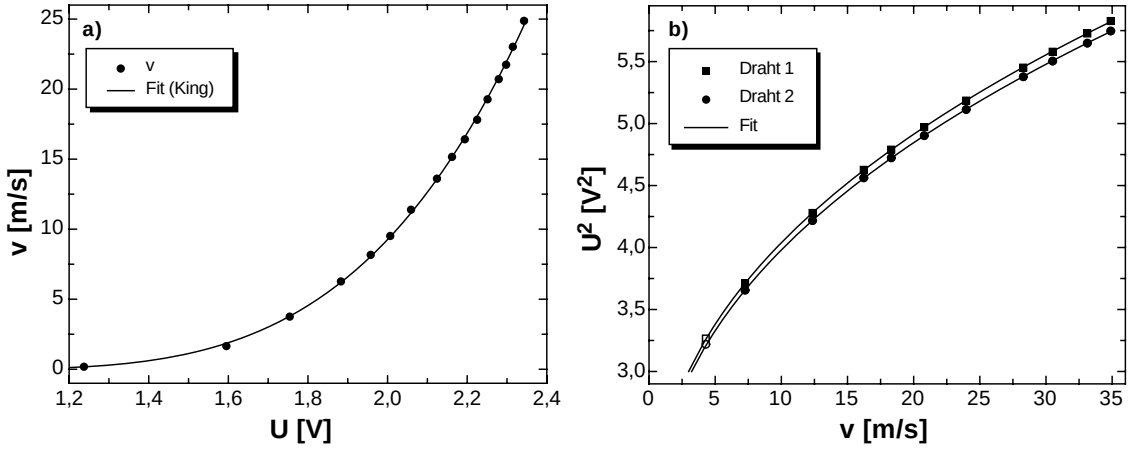


Abbildung 3.5: Typische Beispiele der Geschwindigkeitskalibrierung mit funktionaler Anpassung bei einer Eindrahtsonde in a) und bei einer X-Draht-Sonde in b).

Wie in Abbildung 3.5 zu erkennen ist, ist die Streuung der Messwerte um die Anpassungskurven recht klein. Die Abweichungen bleiben unter 1%.

Bei der Kalibrierung einer X-Draht Sonde ist zusätzlich zu der Geschwindigkeitskalibrierung eine Winkelkalibrierung notwendig. Im Folgenden soll nun das Kalibrierverfahren aus [15] kurz vorgestellt werden, das auch für die hier vorgestellten X-Draht-Messungen verwendet wurde. Es zeichnet sich durch einen recht großen Gültigkeitsbereich bezüglich der auftretenden Strömungswinkel aus, was speziell für Turbulenzuntersuchungen wichtig ist.

Auch bei X-Draht-Sonden muss natürlich eine Geschwindigkeitskalibrierung vorgenommen werden, um die Werte der Brückenspannung mit den Strömungsgeschwindigkeiten in Verbindung zu setzen. Diese erfolgt vor der Winkelkalibrierung analog zu dem Verfahren bei Eindrahtsonden. Abbildung 3.5 zeigt in Teil b) eine typische Geschwindigkeits-Kalibrierkurve für einen X-Draht. Als Grundlage zur funktionalen Anpassung der Anemometerspannung U an die entsprechende Windgeschwindigkeit v dient der Potenzansatz

$$U^2 = U_0^2 + CQ^n, \tag{3.2}$$

wobei Q die effektive Kühlgeschwindigkeit beschreibt, die über folgenden Zusammenhang proportional zum Betrag der Windgeschwindigkeit v ist

$$Q = |v| \cos \psi \tag{3.3}$$

mit ψ als Anstellwinkel des Drahtes zur Strömung. Da bei dem ersten Kalibrierschritt der Anstellwinkel ψ der beiden Drähte noch nicht bekannt ist, wird zunächst die vereinfachte Form

$$U^2(|v|) = U_0^2 + C'|v|^n, \tag{3.4}$$

die sich aus den Gleichungen (3.2) und (3.3) ergibt, verwendet. Man erhält also für jeden Draht durch Anpassung von Gleichung (3.4) an die Messdaten die Parameter U_0, n, und C', wobei C' über den Zusammenhang $C' = C \cos^n \psi$ den noch nicht bekannten Anstellwinkel des Drahtes zur Strömung beinhaltet (vgl. Abbildung 3.5). Da die Drahtwinkel Fertigungstoleranzen aufweisen, sich bei der Erwärmung leicht ändern und auch niemals exakt ausgerichtet werden können, ist es angebrachter, einen sogenannten effektiven Anstellwinkel ψ_{eff} zu verwenden. Dieser effektive Winkel beinhaltet dann die angesprochenen Abweichungen und kompensiert sie damit im Endresultat.

Um diese effektiven Anströmwinkel der Drähte zu ermitteln, variiert man den Anstellwinkel des gesamten X-Draht-Sensors relativ zur mittleren Strömungsrichtung um verschiedene Winkel δ (siehe dazu Abbildung 3.6a). Für

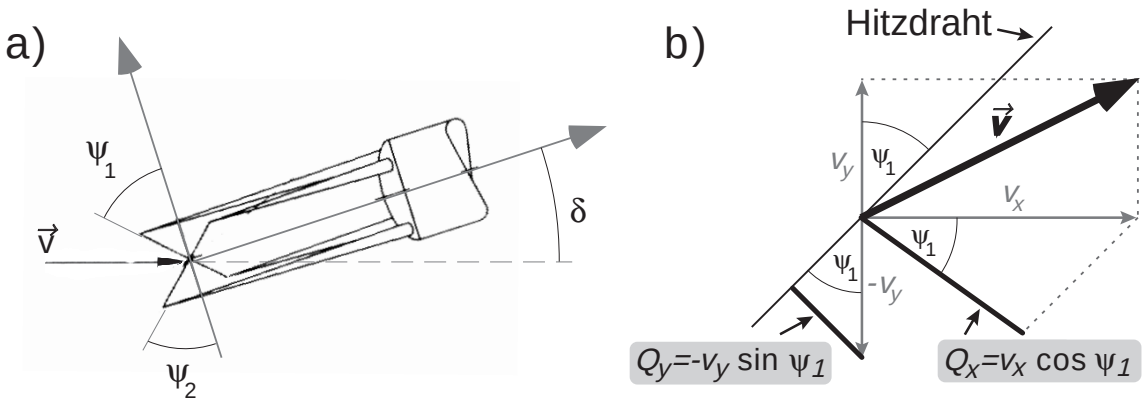


Abbildung 3.6: Zeichnung zu den Winkeldefinitionen für die X-Draht-Kalibrierung. Teil a) definiert die verwendeten Winkelbezeichnungen (δ, Ψ_1, Ψ_2). Teil b) ist eine geometrische Skizze zur Bestimmung der Kühlraten Q_x und Q_y.

die effektive Kühlgeschwindigkeit ergibt sich nun aus Gleichung (3.3)

$$Q = |v| \cos(\psi_{eff} + \delta). \tag{3.5}$$

Zusammen mit Gleichung (3.2) ergibt sich bei konstant gehaltener Windgeschwindigkeit v eine vom Anstellwinkel δ abhängige Anemometerspannung $U(\delta)$

$$U^2(\delta) = U_0^2 + C\{|v|\cos(\psi_{eff} + \delta)\}^n. \tag{3.6}$$

Die Parameter U_0 und n sind schon aus der Geschwindigkeitskalibrierung bekannt und daher müssen nun lediglich C und ψ_{eff} aus der Winkelvariation bestimmt werden. Bringt man U_0 in Gleichung (3.6) auf die linke Seite und dividiert dann durch eben diese Gleichung für den Winkel $\delta = 0$, so erhält man

$$\left[\frac{U^2 - U_0^2}{U^2(\delta = 0) - U_0^2}\right]^{1/n} = \frac{\cos(\delta + \psi_{eff})}{\cos\psi_{eff}}. \tag{3.7}$$

Damit hat man den Parameter C eliminiert und kann mit der durch Umformen erhaltenen Gleichung

$$\cos\delta - \left[\frac{U^2 - U_0^2}{U^2(\delta = 0) - U_0^2}\right]^{1/n} = \tan\psi_{eff}\sin\delta \tag{3.8}$$

mittels einfacher linearer Regression den effektiven Drahtwinkel der einzelnen Drähte bestimmen, indem man die linke Seite gegen $\sin\delta$ aufträgt. Dann kann aus C' der Parameter C über den Zusammenhang $C' = C\cos^n\psi$ bestimmt werden. Eine zweite Möglichkeit zur Bestimmung von C' besteht in der Verwendung von Gleichung (3.6) mit $\delta = 0$. In Abbildung 3.7 ist eine typische Winkelkalibrierung dargestellt.

Um eine Kontrolle über die Güte der ermittelten Parameter zu bekommen, kann man für die verschiedenen Anstellwinkel δ mittels der Parameter die damit zu erwartende Windgeschwindigkeit mit der gemessenen vergleichen. Dies kann zunächst für die beiden Drähte getrennt über Gleichung (3.6) erfolgen. In Abbildung 3.8 a) ist die Abweichung der so ermittelten Geschwindigkeit von der gemessenen dargestellt. Da die zwei Komponenten des Geschwindigkeitsvektors aus der Kombination der Signale der beiden Drähte errechnet werden, ist eine Abschätzung der Fehler für die Komponenten aufgrund der Unsicherheit bei der Parameterbestimmung zusätzlich zu empfehlen.

Die Umrechnung von den Signalen der Drähte auf die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors wird nun im folgenden Teilabschnitt beschrieben. Die durch diese Umrechnung mit den aus der Kalibrierung gewonnenen Parametern erhaltene Geschwindigkeit für jede Komponente kann dann mit dem Anteil der (gemessenen) Hauptwindgeschwindigkeit verglichen werden. Dieser Anteil ergibt sich aus der Projektion auf die jeweilige Komponente in dem um δ gedrehten Koordinatensystem. Abbildung 3.8 zeigt in Teil b) die so errechnete prozentuale Abweichung für die beiden Komponenten.

Man erkennt, dass der Fehler für alle verwendeten Winkel von -25° bis 25° unter 10% liegt. Für negative Winkel wächst der Fehler über 15° recht stark an.

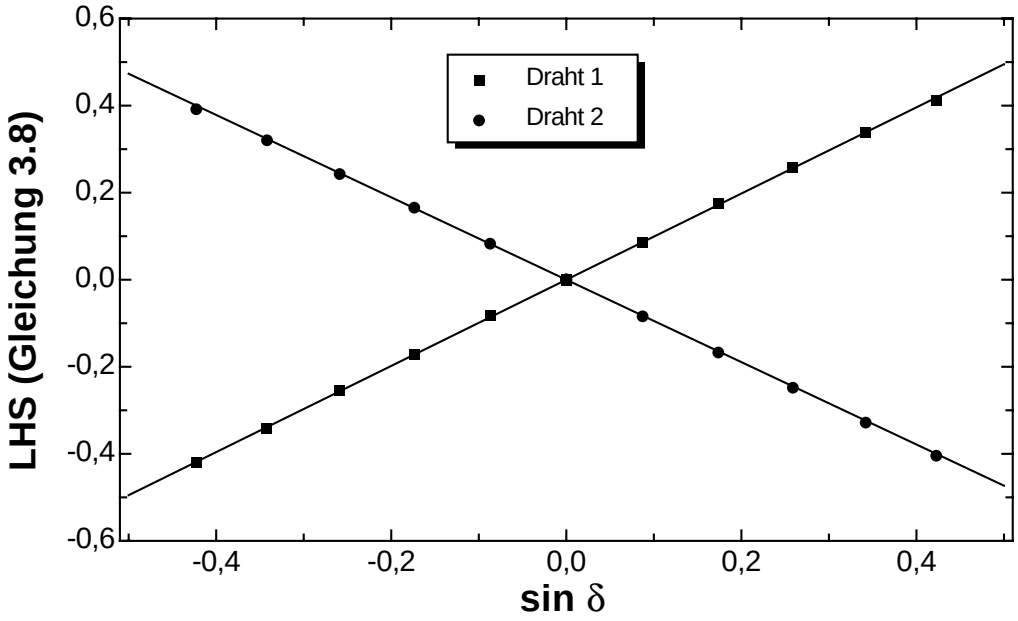


Abbildung 3.7: Die linke Seite der Gleichung (3.8) gegenüber $\sin\delta$ für eine typische Winkelkalibrierung. Über die Steigung der angepassten Geraden erhält man den effektiven Anstellwinkel Ψ_{eff} des jeweiligen Drahtes.

Dieser starke Fehleranstieg ist natürlich auch für positive Winkel zu erwarten. Eine Tendenz dazu ist in dem Diagramm schon zu erkennen, tritt jedoch bei dieser Kalibrierung erst bei Winkeln über 30˚ in dem Maße auf. Um einen Anhaltspunkt zu haben, sei hier kurz erwähnt, dass in Strömungen mit einem Turbulenzgrad von etwa 25% Winkel größer als 15˚ mit etwa fünf prozentiger Wahrscheinlichkeit auftreten.

Desweiteren beeinflusst die dritte Geschwindigkeitskomponente die Messung mit steigendem Turbulenzgrad zunehmend, wie Untersuchungen von Tutu und Chevray ergaben [69]. Bei turbulenten Strömungen mit hohem Turbulenzgrad ($>$25%) sind X-Draht-Messungen also mit recht hohen Fehlern ($>$20%) behaftet. Solch hohe Turbulenzgrade werden beispielsweise in Freistrahlströmungen oder auch in Strömungen, die noch nicht voll entwickelt sind (z.B. direkt hinter einem Hindernis) erreicht.

Die beiden Komponenten des Strömungvektors erhält man nun aus den beiden Signalen der einzelnen Drähte durch folgende kurze Überlegung. Die Kühlgeschwindigkeit Q setzt sich aus zwei Anteilen Q_x und Q_y zusammen, die von den Geschwindigkeitskomponenten v_x, v_y bestimmt werden.

$$Q = Q_x(v_x) + Q_y(v_y) \tag{3.9}$$

Über das Cosinusgesetz der Kühlgeschwindigkeit $Q = v\cos\psi$ und den Zusammenhang $\cos(90° - \psi) = -\sin\psi$, bzw. aus geometrischen Überlegungen

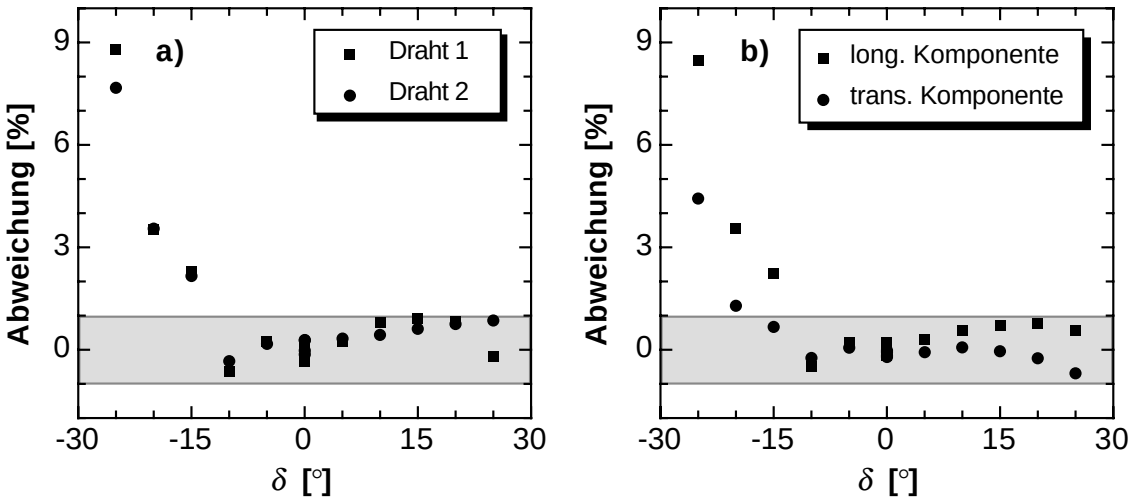


Abbildung 3.8: Fehlerabschätzung bei einer typischen Winkelkalibrierung in Teil a) für die beiden Drähte und in Teil b) für die errechneten Geschwindigkeits-Komponenten. Der Bereich mit einer Abweichung bis zu $\pm 1\%$ ist grau markiert.

(siehe Abbildung 3.6 b) für Q_1) ergibt sich daraus für die Kühlgeschwindigkeiten Q_1 und Q_2 der beiden Drähte

$$Q_1 = v_x \cos\psi_1 - v_y \sin\psi_1 \tag{3.10}$$

$$Q_2 = v_x \cos\psi_2 + v_y \sin\psi_2. \tag{3.11}$$

Hierbei sind mit ψ_1 und ψ_2 die Anstellwinkel der einzelnen Drähte im Koordinatensystem des Sensors bezeichnet, wie in Abbildung 3.6 im Teil a) definiert. Durch Umstellung dieser Gleichungen erhält man die gewünschten Geschwindigkeitskomponenten mit

$$v_x = \frac{Q_1 \sin\psi_2 + Q_2 \sin\psi_1}{cos\psi_1 \sin\psi_2 + cos\psi_2 \sin\psi_1} \tag{3.12}$$

$$v_y = \frac{Q_1 \cos\psi_2 - Q_2 \cos\psi_1}{cos\psi_1 \sin\psi_2 + cos\psi_2 \sin\psi_1}. \tag{3.13}$$

Die zur Umrechnung aus den gemessenen Spannungen benötigten Größe $Q_{1,2}$ erhält man aus Gleichung (3.2) durch

$$Q_i = \left[\frac{U_i^2 - U_{i0}^2}{C}\right]^{1/n_i}. \tag{3.14}$$

Weitere Details zur Kalibrierung von Hitzdrahtsensoren, wie zum Beispiel die Wärmeverteilung längs eines Hitzdrahtes, sind in [14] zu finden.

Datenaufnahme

Zur Signalkonditionierung der zu messenden Messbrücken-Spannungen kamen ein Filter vom Typ SR640 der Firma Stanford sowie die in dem Anemometer zur Verfügung gestellten Filter- und Verstärkerfunktionen zum Einsatz. Der Filter besitzt eine Flankensteilheit von nominell $114\,dB/Oktave$ mit einstellbarer Filterfrequenz bis $100\,kHz$, sowie sehr rauscharme Vor- und Nachverstärker. Da er nur zwei Kanäle besitzt, wurde für die Messungen mit mehreren X-Drähten die interne Signalverarbeitung des Anemometers verwendet.

Die Datenerfassung erfolgte mit Analog-Digital-Wandler-Messkarten durch einen handelsüblichen PC. Verwendet wurde dabei eine Messkarte vom Typ Win30D der Firma UEI[2] mit einer Auflösung von 12 Bit sowie eine Messkarte DT-3005 von Data-Translation mit 16 Bit Auflösung.

Da der Messbereich von $5\,V$ trotz Signalkonditionierung im Allgemeinen nicht zu 100% ausgenutzt werden kann, sowie durch die starke Nichtlinearität in der Geschwindigkeits-Spannungs-Abhängigkeit bei Hitzdrähten (siehe Abbildung 3.5) wird eine möglichst hohe Digitalisier-Auflösung notwendig, auch wenn die statistischen Auswertungen nachher im Zahlenbereich von 0 bis 4095 (entsprechend 12 Bit) erfolgt.

Leider hat die verwendete 16 Bit-Messkarte DT-3005 eine wesentlich geringere maximale (Summen-)Wandlungsrate von $200\,kHz$ gegenüber $1\,MHz$ bei der Win30D. Diese niedrigere Wandlungsrate wirkt sich bei Mehrkanalmessungen besonders aus, da hierbei die Summenwandlungsrate durch die Anzahl der Kanäle geteilt werden muss.

Desweiteren besitzen die verwendeten Messkarten leider keine sogenannte *Sample&Hold-Stufe*, bei der die Kanäle durch Zwischenspeicherung simultan gemessen werden können. Durch das Fehlen dieser Einheit haben bei Mehrkanalmessungen die einzelnen Kanäle einen kleinen zeitlichen Versatz, der dem Kehrwert der maximalen Summenwandlungsrate entspricht. Also $5\,\mu s$ bei der $200\,kHz$-16-Bit Karte und entsprechend $1\,\mu s$ bei der $1\,MHz$-12-Bit-Karte. Rechnet man den Zeitversatz bei der Datenaufnahme über die mittlere Windgeschwindigkeit in eine Länge um, so erhält man für den ungünstigsten Fall $0,3\,mm$. Der Fehler durch die nichtsimultane Datenerfassung liegt also im Rahmen der Messungenauigkeit bei X-Draht Messungen, die durch den Mindestabstand der beiden Hitzdrähte gegeben ist. Da sich die Fehler addieren, wäre natürlich trotzdem, speziell für Messungen mit mehreren X-Draht Sonden, eine simultane hochauflösende Messdatenerfassung wünschenswert.

Sample&Hold Einheiten können durch die analoge Zwischenspeicherung einen gewissen Rauschpegel ($\approx 1\,mV$) nicht unterschreiten, wodurch die ef-

[2] United Electronic International

fektive erzielte Auflösung auch bei Verwendung eines hochauflösenden AD-Wandlers nicht viel besser als 12 Bit ($5\,V/4095 \approx 1,2\,mV$) ist. Um diese Einbußen zu umgehen, müsste eine simultane Messwerterfassung daher mittels Synchronisation mehrerer AD-Wandler durchgeführt werden. Eine solche Möglichkeit stand jedoch im Rahmen dieser Arbeit leider nicht zur Verfügung.

3.2 Gitternachlauf

3.2.1 Beschreibung der Strömung

Die erste in dieser Arbeit untersuchte Strömung ist die Nachlaufströmung hinter einem Gitter mit quadratischen Maschen. Die Experimente wurden an einem Gitter mit einer Maschenweite von $M = 5\,cm$ bei einer Stegbreite von $1\ cm$ durchgeführt. Da die Strömung durch die immer gleich wiederkehrenden quadratischen Maschen des Gitters auf der gesamten Querschnittsfäche gleichförmig verwirbelt wird, ist diese Nachlaufströmung sehr gut geeignet, um dem oben angesprochenen Idealfall der homogenen isotropen Turbulenz möglichst nahe zu kommen. Um eine Vorstellung der dort herrschenden Strömungsverhältnisse zu bekommen, ist in Abbildung 3.9 eine Visualisierung der Strömung hinter einem quadratischen Gitter gezeigt.

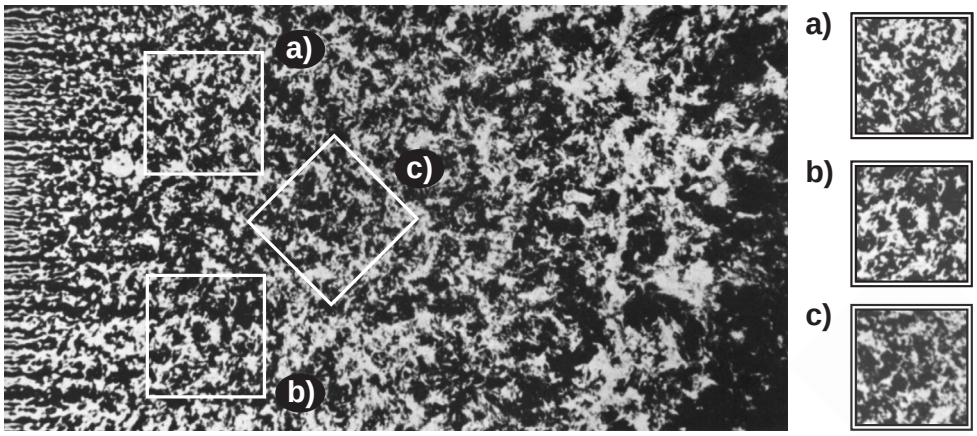


Abbildung 3.9: Visualisierung der Nachlaufströmung hinter einem Gitter. Drei Ausschnitte a)-c) verdeutlichen Homogenität (a) verschoben zu b)) und Isotropie (c) gedreht zu a) und b)) (aus [27]).

Man erkennt deutlich, dass schon wenige Maschenweiten hinter dem Gitter zwischen verschiedenen Ausschnitten (a-c im Bild) im Hinblick sowohl auf ihren Ursprung (Homogenität), als auch auf ihrer Orientierung (Isotropie) nicht

mehr unterschieden werden kann. Genauere Untersuchungen (z. B. [71]) zeigen jedoch leichte Abweichungen von dieser idealen Turbulenz, die vor allem auf den Einfluss der mittleren Geschwindigkeit zurückgehen. Die Geschwindigkeitskomponente in Strömungsrichtung zeigt ein leicht anderes Verhalten, als die beiden transversalen Komponenten. Diese Abweichungen sind jedoch gering, so dass die Gitterströmung trotzdem eine gute Näherung der lokal isotropen Strömung darstellt [71].

Aufgrund einiger technischer Probleme und der recht begrenzten Messzeit im Rahmen des DFG-Projekts, das dieser Arbeit zugrunde liegt, konnten nur einige Messungen in dieser Strömung durchgeführt werden. Mit Eindraht-Sensoren erfolgten Messreihen einerseits in verschiedenen Abständen zwischen $5\,cm$ und $1,6\,m$ bei hohen Reynoldszahlen, sowie in einem maximalen Abstand des Sensors bei verschiedenen Windgeschwindigkeiten. Mit X-Draht Sensoren konnte aus oben genannten Gründen leider nur bei hohen Geschwindigkeiten in maximalem Abstand ($1,6\,m$) gemessen werden. Für die betrachtete Fragestellung sind dies jedoch die entscheidenden Messreihen.

3.2.2 Charakterisierung und Konsistenz der Messungen

Ein erster Test für die innere Konsistenz der Messreihen ist der Verlauf der intrinsischen Längen: Kolmogorov-Länge η, Taylor-Länge λ und Integrale Länge L für isotrope vollentwickelte Turbulenz bei verschiedenen Geschwindigkeiten und damit verschiedenen Reynoldszahlen. Abbildung 3.10 zeigt diese Längen für die Nachlaufströmung hinter dem Gitter.

Aus den Definitionen dieser Längenmaße und hydrodynamischen Überlegungen zur Energiedissipationsrate, die hier nicht vertieft werden sollen und beispielsweise in [30] nachgeschlagen werden können, ergeben sich die folgenden Zusammenhänge zwischen diesen charakteristischen Längen und der Reynoldszahl. Für die Kolmogorov-Länge η erhält man

$$\eta \propto Re^{-3/4}, \tag{3.15}$$

für das Taylorsche Längenmaß

$$\lambda \propto Re^{-1/2} \tag{3.16}$$

und die Integrale Länge L sollte konstant sein, da sie die größten Turbulenzelemente beinhaltet und durch die geometrischen Randbedingungen der Strömung gegeben ist. Der Verlauf dieser Längemaße über Re wurde für die Messungen bei großem Abstand ($X = 32M$) des Sensors zum Gitter berechnet, da die Zusammenhänge (3.15) und (3.16) nur für vollentwickelte und isotrope Turbulenz gelten.

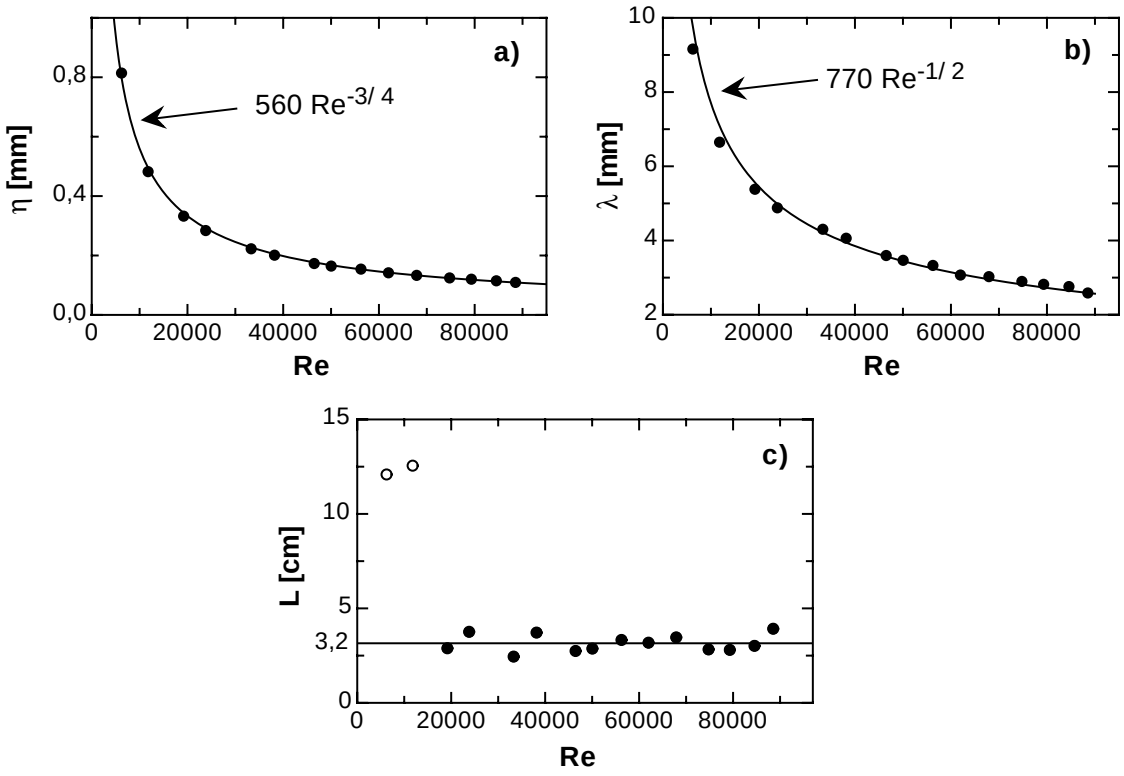


Abbildung 3.10: Darstellung der charakteristischen Längen einer turbulenten Strömung in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit. a) Kolmogorovsches Mikrolängenmaß, b) Taylor Länge, c) Integrale Länge.

Die Ergebnisse in Abbildung 3.10 zeigen eine sehr gute Übereinstimmung mit diesen erwarteten Verläufen. Bei der Integralen Länge (Teil c) von Abbildung 3.10) liegen die ersten zwei Werte für die kleinsten Reynoldszahlen weit zu hoch. Dies kann auf kohärente Wirbelstrukturen zurückgeführt werden, die bei dieser kleinen Reynoldszahl und der Entfernung des Messsensors zum Gitter noch nicht zerfallen sind und sich daher in der Autokorrelationsfunktion, die nach Gl. (2.21) zur Bestimmung von L herangezogen wird, niederschlagen.

Ein weiteres Merkmal von isotroper vollentwickelter Turbulenz ist die Abhängigkeit der vom Strömungstyp unabhängigen auf die Taylorlänge λ bezogenen Reynoldszahl R_λ von der 'direkten' Reynoldszahl Re. Aus (3.16) ergibt sich für die Abhängigkeit von R_λ von Re die Proportionalität

$$R_\lambda \propto Re^{1/2}. \tag{3.17}$$

Da Instationaritäten und Störungen der Nachlaufströmung bei der Bestimmung dieser Abhängigkeit einen großen Einfluss ausüben, stellt dies einen weiteren Test zur inneren Konsistenz des vorliegenden Experiments dar.

Abbildung 3.11 zeigt R_λ in Abhängigkeit von der Reynoldszahl Re für eine Eindraht-Messung bei maximalem Sensorabstand von $1,6\,m$. Die im Dia-

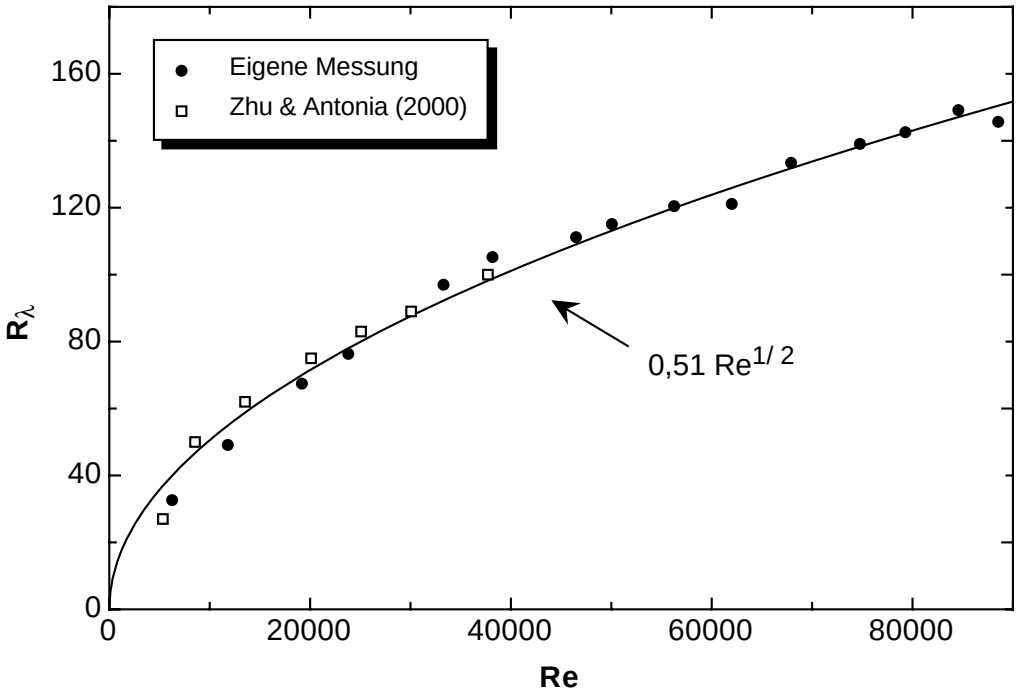


Abbildung 3.11: Taylorsche Reynoldszahl R_λ über Re bei einer Eindrahtmessung mit Sensorposition $X = 1,6\,m$ ($= 40\,M$) hinter dem Gitter (Maschenweite $M = 5\,cm$). Zum Vergleich sind die Werte einer Messung von Zhu und Antonia [78] mit eingezeichnet (offene Symbole).

gramm eingezeichnete Anpassung bestätigt die Erwartung (Gl. 3.17), was die Güte der Messung unterstreicht. Es zeigte sich nämlich, dass die Bestimmung der Taylorschen Reynoldszahl, da sie die Länge λ und die Standardabweichung σ_v der Geschwindigkeit beinhaltet, sehr empfindlich auf Störungen in der Strömung reagiert. Vielleicht wird aus diesem Grund ein solches Diagramm in der Literatur sehr selten gezeigt. Der Vorfaktor stimmt mit dem von A. Naert in seiner Dissertation gefundenen Wert von 0,5 im Fernfeld eines Freistrahls [48] sehr gut überein. In dieser Abbildung 3.11 sind zum Vergleich die von Zhu und Antonia in [78] veröffentlichten Werte für eine Messung einer Gitterströmung (Gitter: $M \approx 2,5\,cm$) im Abstand $X = 70M$. Man erkennt eine hervorragende Übereinstimmung von R_λ vs. Re der beiden Messreihen.

Durch die Übereinstimmung der Reynoldszahl-Abhängigkeiten der verschiedenen für turbulente Strömungen charakteristischen Größen mit den theoretischen Voraussagen ergibt sich ein konsistentes Bild. Dies zeigt einerseits die Qualität der Messdaten und andererseits kann eine der idealen vollentwickelten Turbulenz recht nahe kommende Strömung angenommen werden. Damit sind die Voraussetzungen für weitergehende Untersuchungen gegeben.

3.2.3 Analyse der Daten mit 'klassischen' Methoden

Spektralanalyse

Im vorherigen Kapitel wurden die Kolmogorov'schen Annahmen vorgestellt, die für ideale, also homogene und isotrope Turbulenz gelten. Eine Folgerung ist das Potenzgesetz (Gl. (2.34)) für das Leistungsspektrum der Geschwindigkeit im Inertialbereich, der mit wachsender Reynoldszahl größer wird.[3] Die folgende Abbildung 3.12 zeigt das Leistungsspektrum für die Gitterströmung bei verschiedenen Geschwindigkeiten.

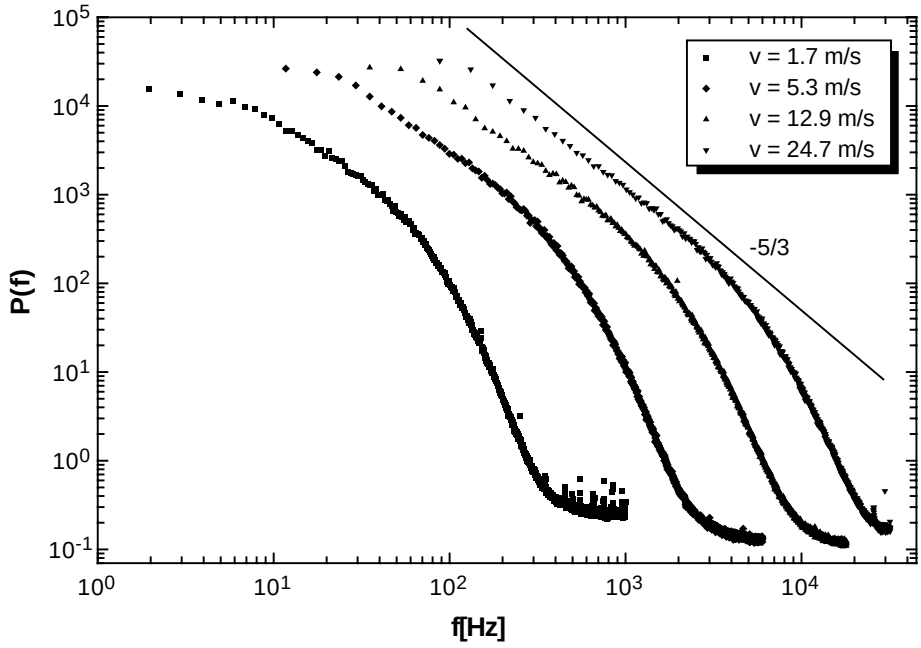


Abbildung 3.12: Leistungsspektren der Gitterströmung bei verschiedenen Geschwindigkeiten. Zusätzlich ist eine Gerade eingezeichnet, die einem $f^{-5/3}$ Potenzverhalten genügt.

Es ist deutlich erkennbar, dass der Bereich, in dem ein Potenzgesetz-Verhalten beobachtet wird, mit wachsender Windgeschwindigkeit größer wird. Die Steigung in diesem Bereich ist für alle Windgeschwindigkeiten gleich und etwas geringer als die Voraussage nach Kolmogorov'41 (Gerade mit der Steigung -5/3 nach Gl. (2.34)). Dies lässt auf Intermittenz schließen, da der Exponent, den Gleichungen (2.44) und (2.45) zufolge, bei intermittentem Verhalten geringer ist.

[3] Die Taylor-Länge λ fällt mit steigender Reynoldszahl, während die Integrale Länge konstant bleibt (siehe vorheriger Abschnitt).

Momentenanalyse

Als weitere Analysemethode soll hier nun die Momentenanalyse aus Kapitel 2.4.2 auf die Gitterströmung angewandt werden. Da diese Methode, trotz ihrer dort angesprochenen Schwierigkeiten recht oft verwendet wird, ist so ein Vergleich zu anderen Messungen möglich. Dies dient der erneuten Bestätigung der Validität der vorliegenden Messreihen als Basis für die folgenden Untersuchungen. Abbildung 3.13 zeigt exemplarisch für die Messung mit der Windgeschwindigkeit $v = 24,7\,m/s$ die Momente (=Strukturfunktionen) der Ordnungen 2 bis 6, wobei, bei ungeraden Ordnungen die Betragsmomente verwendet wurden (s. Kapitel 2.4.2).

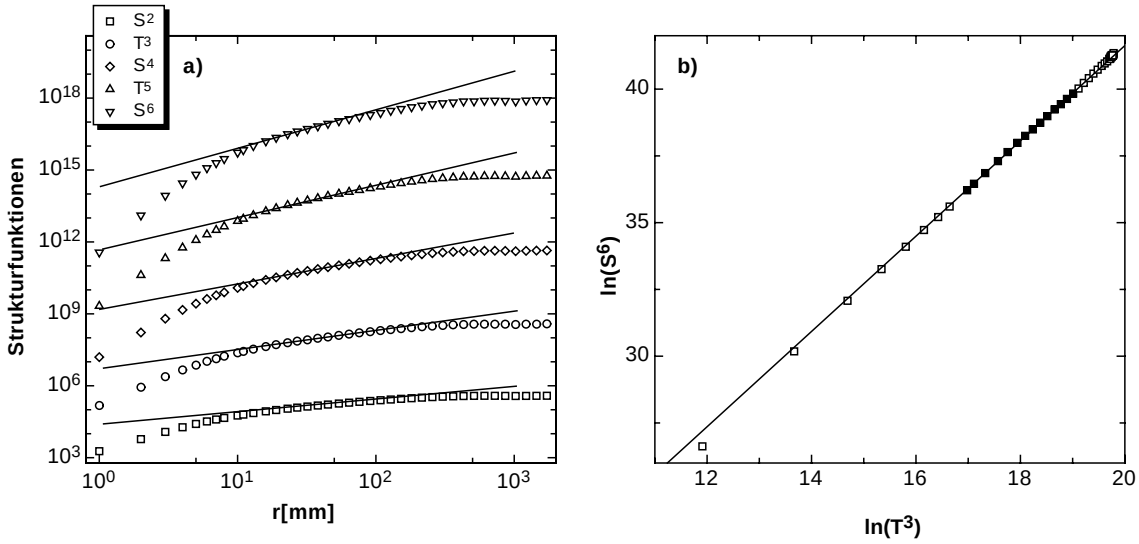


Abbildung 3.13: Darstellung der Momente mit den Ordnungen 2 bis 6 der Gitterströmung bei einer Windgeschwindigkeit von $24,7\,m/s$ (Teil a). In Teil b) ist gemäß der ESS-Methode die Strukturfunktion 6. Ordnung gegenüber der 3. Ordnung aufgetragen. Dabei kennzeichnen die gefüllten Symbole die für die Anpassung der Geraden verwendeten Werte.

Durch die relativ geringe Reynoldszahl ($R_\lambda \approx 100$) ist das Skalenverhalten nicht besonders ausgeprägt. Eine direkte Bestimmung der Skalenexponenten ist somit nicht sinnvoll. Zum Vergleich sind die nach Kolmogorov'41 (gültig für große Reynoldszahl) zu erwartenden Steigungen eingezeichnet. Man erkennt eine für Momente höherer Ordnung stärker werdende Abweichungen des Skalenverhaltens von Kolmogorov '41. Dies kann wiederum auf die Intermittenzkorrektur (Gl. (2.44) und (2.45)) zurück geführt werden.

Durch die von Benzi et al. in [10] und [11] eingeführte und im vorangegangenen Kapitel besprochene Methode der erweiterten Selbstähnlichkeit (ESS), lassen sich die Skalenexponenten auch bei solch moderaten Reynoldszahlen

besser bestimmen. Dazu werden die Logarithmen der Strukturfunktionen gegeneinander aufgetragen; hier (Abbildung 3.13 in Teil b) für S^6 gegen T^3. Man erkennt einen deutlich erweiterten linearen Verlauf und kann nun die Steigung bestimmen. Da für T^3 der Skalenexponent (als direkte Folgerung aus der Navier-Stokes-Gleichung[4]) gleich eins ist, gibt die Steigung der Ausgleichsgeraden in Abbildung 3.13 b) direkt den Exponenten ζ_6 von S^6 wieder. Er beträgt $\zeta_6 \approx 1,78 \pm 8 \cdot 10^{-3}$, wobei die Fehlerangabe durch den Regressionskoeffizienten gegeben ist. Da bei der ESS-Methode grundsätzlich das Problem besteht, dass es keine (theoretische) Vorgabe des Anpassungsbereiches gibt, ist der tatsächliche Fehler größer und nicht direkt angebbar.

Diese Analyse wurde nun mit allen (schon besprochenen) Messreihen der Gitterströmung durchgeführt, also mit Eindrahtmessungen bei verschiedenen Geschwindigkeiten, sowie X-Draht Messungen bei ca. $20\,m/s$. Zusammengefasst sind die Exponenten ζ_6 in folgendem Diagramm 3.14 dargestellt.

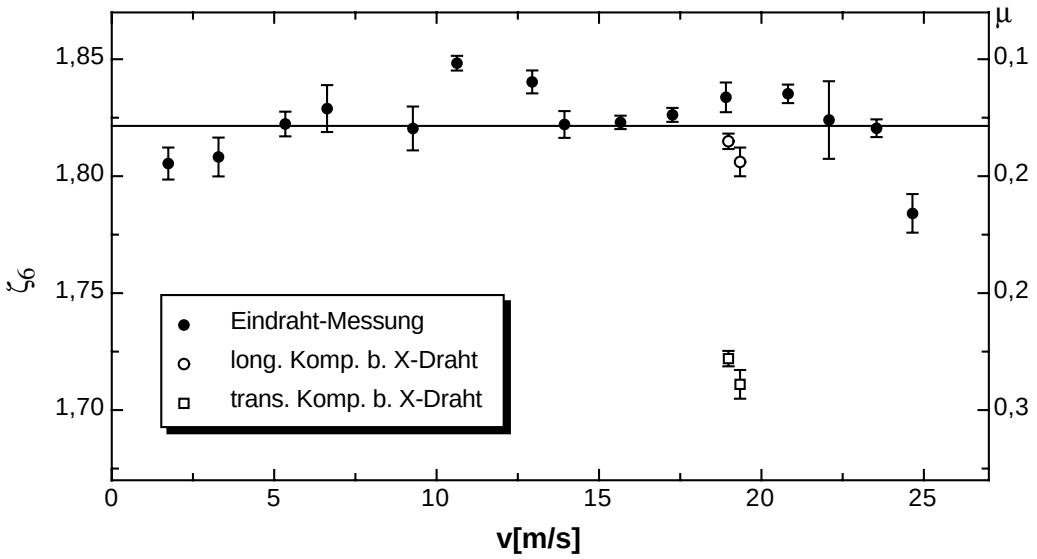


Abbildung 3.14: Skalenexponenten ζ_6 für Eindraht- sowie X-Draht-Messungen, ermittelt durch ESS-Analyse von S^6 gegenüber T^3.

Es ist keine Abhängigkeit des Skalenexponenten (hier ζ_6) von der Windgeschwindigkeit v erkennbar. Wie oben schon bereits beschrieben ist der tatsächliche Fehler größer, als die durch die Regression bestimmten Fehlerbalken angeben. Daher kann bei der Eindrahtmessung für ζ_6 ein Wert zwischen 1,8 und 1,85 angenommen werden. In der Zusammenfassung verschiedener Messungen in unterschiedlichen Strömungen[5] ergab sich in [5] ein mittlerer Wert von $\zeta_6 = 1,74$, ein etwas kleinerer Wert, als der hier ermittelte.

[4] siehe dazu Abschnitt zu ESS in Kapitel 2

[5] Gitter, Zylinder, Freistrahl

Bei den komponentenaufgelösten X-Draht-Messungen ist auffällig, dass für die longitudinale Komponente in etwa Skalenexponenten entsprechend der Eindraht-Messung ermittelt werden. Dies erklärt sich aus der Tatsache, dass der Hauptbeitrag der Kühlrate bei der Eindraht-Messung durch die Hauptströmungsrichtung gegeben ist. Die transversalen Komponenten, also Horizontal- und Vertikalkomponente, besitzen dagegen deutlich kleinere Skalenexponenten $\zeta_6 \approx 1,72$, die aufgrund der Unsicherheiten in der Bestimmung jedoch nicht weiter gegeneinander abgegrenzt werden können. Dieses Ergebnis stimmt mit den aus Simulationen gewonnenen Resultaten von Chen et al. [22] sehr gut überein. Man erhält über die Gleichungen (2.44) und (2.44) mit $n = 6$ für den Skalenexponenten $\zeta_6 = 2 - \mu$. Für die transversalen Komponenten ist damit die durch die Intermittenz hervorgerufene Korrektur μ mit $\mu_t \approx 0,28$ etwas größer gegenüber der Longitudinalkomponente mit $\mu_l \approx 0,18$. Die Transversalkomponenten weisen also ein stärker intermittentes Verhalten als die Komponente in Strömungsrichtung auf. Dieser Aspekt soll nun anhand der Verteilungen der Inkremente näher untersucht werden.

Verteilungen der Inkremente

Für die Verteilungen der Geschwindigkeitsinkremente bedeutet Intermittenz eine Abweichung von einer Normalverteilung, derart, dass sehr kleine und sehr große Inkremente häufiger auftreten, während Inkremente mittlerer Größe weniger häufig vertreten sind. Abbildung 3.15 zeigt die Inkrementverteilungen der oben bereits besprochenen X-Draht-Messung der Gitter-Nachlaufströmung. Zusammen mit den aus den Messdaten gewonnenen Häufigkeitsverteilungen der Inkremente sind jeweils die nach Castaing (siehe Abschnitt 2.4.3) angepassten Log-Normal-Verteilungen eingezeichnet.

Um die Formänderung bei Intermittenz deutlich zu machen, ist der Wertebereich der Inkremente auf die jeweilige Standardabweichung normiert. Die Formänderung ist in beiden Komponenten deutlich zu erkennen. Während für große Inkrementabstände ($r > 5\,cm$) ein nahezu gaußförmiger Verlauf (Parabel in semilogarithmischer Auftragung) beobachtet wird, ist bei kleinen Inkrementabständen die Verteilung spitzer und besitzt ausladende Flügel. Es besteht ein regelrechter Streit um den funktionalen Verlauf der Flügel, der allerdings sehr schwer zu entscheiden ist, da in den äußeren Bereichen nur sehr wenige Ereignisse auftreten. Die hier verwendete Anpassung durch das Log-Normal-Modell von Castaing zeigt eine sehr gute Übereinstimmung mit den Messdaten.

Man erkennt weiterhin, dass die Inkrementverteilungen der Longitudinalkomponente (Teil a) eine leichte Asymmetrie aufweisen, während die Verteilungen der Horizontalkomponente symmetrisch sind. Dieser Effekt wurde

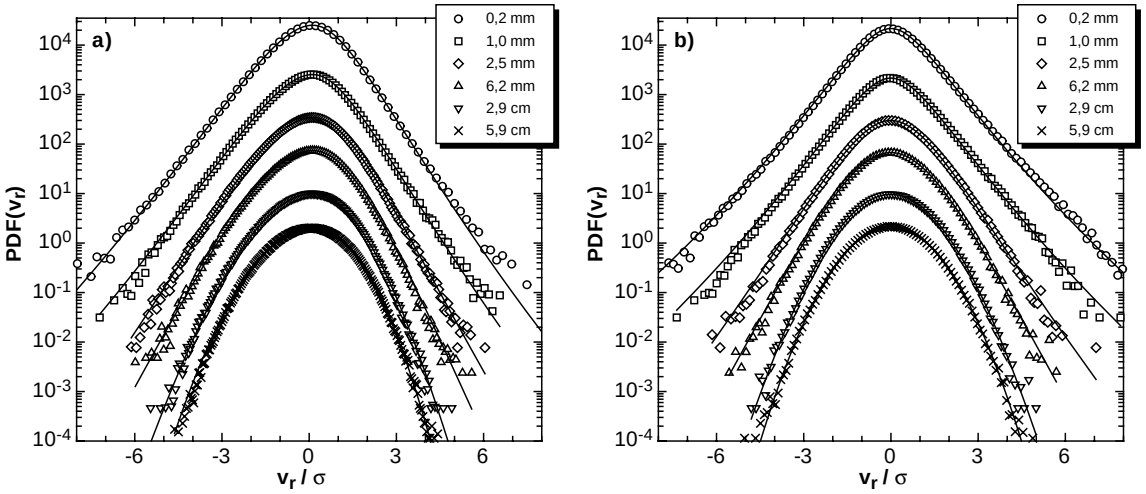


Abbildung 3.15: Verteilungen der Geschwindigkeitsinkremente der Longitudinal- (Teil a) und der Horizontalkomponente (Teil b) mit Anpassung nach Castaing (Linien).

ebenfalls von Kahalerras bei einem Experiment, bei dem die transversalen Inkremente durch zwei versetzte Eindraht-Sonden bestimmt wurden, gefunden [36]. Ebenso verhält es sich für die Vertikalkomponente, die hier nicht dargestellt ist. Daher wurde bei der Castaing-Anpassung nach Gleichung (2.50) bei der Longitudinalkomponente der Asymmetriefaktor $\gamma = 0,18$ gewählt, während für die transversalen Komponenten γ gleich Null gesetzt werden konnte. Die Castaingsche Anpassungsgleichung (2.50) besitzt einen Parameter $\tilde{\lambda}$, der die Abweichung von einer Gaußverteilung, die bei $\tilde{\lambda} = 0$ vorliegt, angibt. Je größer dieser Formparameter $\tilde{\lambda}$ wird, desto stärker ist die Intermittenz ausgeprägt. Die folgende Abbildung 3.16 zeigt $\tilde{\lambda}(r)^2$ in zwei verschiedenen Auftragungen, um die im vorigen Kapitel besprochenen Abhängigkeiten von r, Gl. (2.55) und Gl. (2.56), zu überprüfen.

Man erkennt einen prinzipiell ähnlichen Verlauf der einzelnen Komponenten. Als erstes wichtiges Ergebnis ist zu bemerken, dass $\tilde{\lambda}^2$ für die beiden Transversalkomponenten gleich verläuft. Verglichen mit der longitudinalen Komponente sind die Werte von $\tilde{\lambda}^2$ bei gleichem r jedoch größer. Damit bestätigt sich hier das stärker intermittente Verhalten der transversalen Komponenten. Diese Ergebnisse sind in Übereinstimmung mit den im vorigen Abschnitt mit der ESS-Methode erzielten Resultaten. Da der Parameter $\tilde{\lambda}$ besser bestimmbar ist, als ein Skalenexponent, und zudem noch Informationen über die Längenskala r enthält, sind nun weitere Aussagen möglich.

Aus Abbildung 3.16 ist abzulesen, dass in allen Komponenten bei einer Längenskala $r \approx 0,4\,mm$ die Intermittenz, also die Abweichung von einer Normalverteilung, am größten ist. Dies entspricht in etwa $4\,\eta$, bzw. $0,2\,\lambda$.

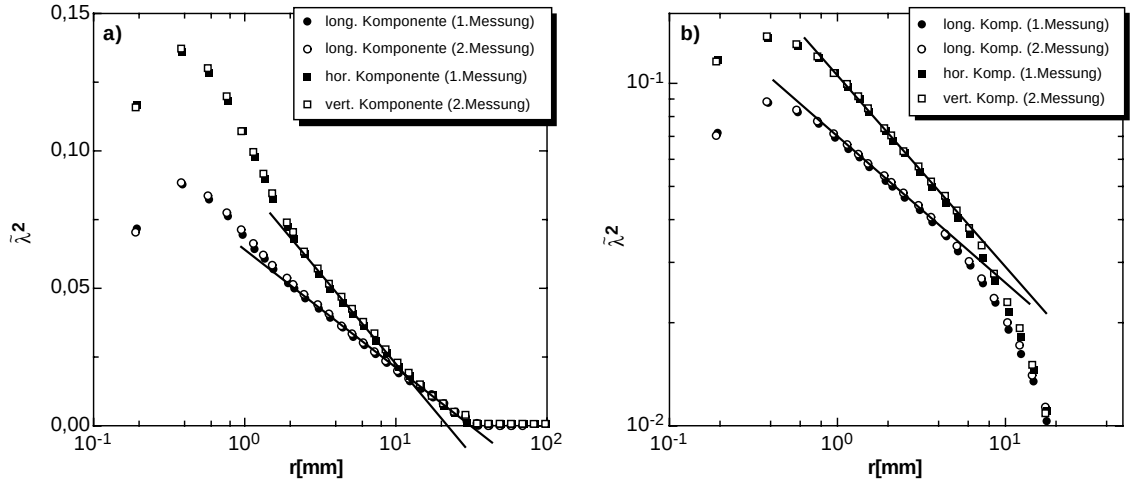


Abbildung 3.16: Darstellung des Formparameters $\tilde{\lambda}(r)^2$, erhalten aus der Anpassung nach Castaing (Gl. (2.50)), für die verschiedenen Komponenten des Geschwindigkeitsvektors der Gitterströmung. In Teil a) ist die lineare, in Teil b) die logarithmische Auftragung, bei jeweils logarithmischer Längenskala r, gezeigt.

Desweiteren bestätigt sich, erkennbar in Teil a) dieser Abbildung, in einem Längenskalenbereich von $2\,mm$ bis $3\,cm$ für die longitudinale, bzw. $3\,mm$ bis $1,8\,cm$ für die transversale Komponente, die Gültigkeit von Gleichung (2.55). Die Größe μ aus dieser Gleichung bestimmt sich zu $\mu_l = 0,16$ für die longitudinale und zu $\mu_t = 0,25$ für die transversale Komponente. Diese Werte für die Intermittenzkorrektur μ stimmen gut mit den im vorigen Abschnitt mittels ESS-Analyse gewonnenen Ergebnissen überein (siehe dort).

Der linearen Verlauf in der doppellogarithmischen Darstellung (Abbildung 3.16 b)) zeigt die Gültigkeit von Gleichung (2.56) für einen Längenskalenbereich, der bei kleineren Längenskalen liegt. Der Längenskalenbereich liegt hier zwischen $0,8\,mm$ und $3,7\,mm$ für die longitudinale, bzw. $1\,mm$ und $5\,mm$ für die transversale Komponente. Der Exponent β aus Gleichung (2.56) beträgt $\beta_l = -0,43$ für die longitudinale, bzw. $\beta_t = -0,59$ für die transversale Komponente. Chabaud et. al erhielten in einem Freistrahlexperiment ein vergleichbares Resultat [17]. Dort wurde allerdings keine komponentenweise Messung durchgeführt, so dass zu dem Unterschied der Komponenten kein Vergleich mit dieser Messung angestellt werden kann.

Mit diesen Untersuchungen der Strukturfunktionen und der Inkrementverteilungen konnten einige Ergebnisse zu der in der Einleitung dargestellten aktuellen Fragestellung nach den Unterschieden der Statistik der Geschwindigkeitsinkremente der verschiedenen Geschwindigkeitskomponenten beigetragen werden.

3.3 Zylindernachlauf

Als zweite wichtige Laborströmung gilt der Nachlauf eines Zylinders. Die Zylinder-Nachlaufströmung kann gewissermaßen als Prototyp einer Umströmung eines Körpers gesehen werden.

3.3.1 Beschreibung der Strömung

Wie bereits zuvor bei der Gitterströmung sollen zunächst mittels Visualisierungen der Strömung einige grundlegende Eigenschaften der Strömung qualitativ dargestellt werden. Abbildung 3.17 zeigt eine Rauch-Visualisierung der Zylinderströmung in geringem Abstand (zwischen 2 und 5 Durchmesser[6]) bei einer Reynoldszahl von $Re \approx 2000$.

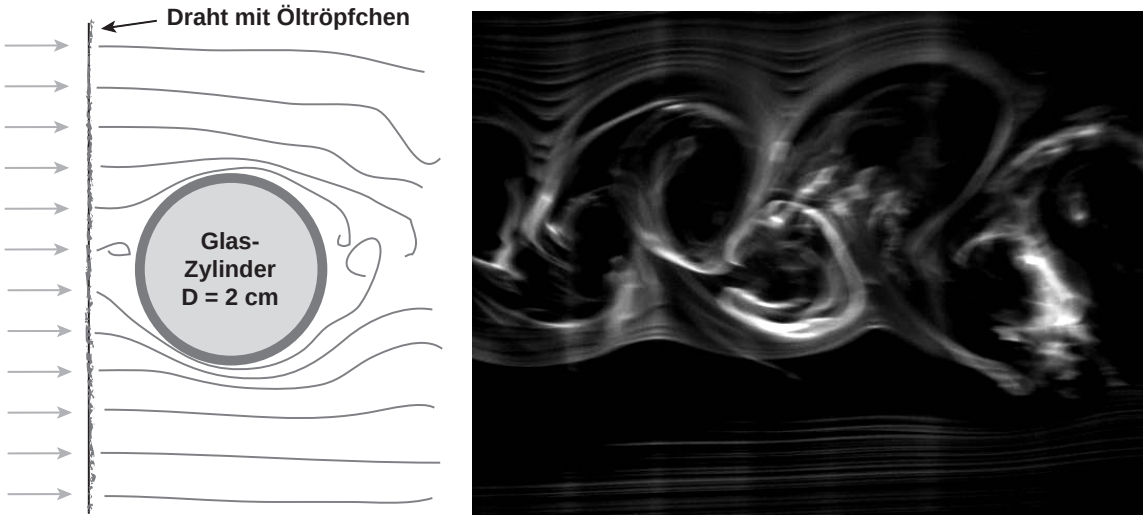


Abbildung 3.17: Visualisierung der Nachlaufströmung direkt hinter einem Zylinder bei einer Reynoldszahl von ca. 2000.

Die Visualisierung wurde von S. Barth und M. Karth aus unserer Arbeitsgruppe am Windkanal der Universität Oldenburg durchgeführt [7]. Die Sichtbarmachung der Strömung erfolgte durch an einem geheizten Draht verdampfende Öltröpfchen, deren Rauch von der Strömung mitgeführt wird. Die Aufnahmen wurden mit einer handelsüblichen Spiegelreflex-Kamera gemacht. Deutlich ist die recht regelmäßige Wirbelbildung zu erkennen. Die Wirbel sind in etwa von der Größe des Zylinderdurchmessers und werden *Karman-Wirbel* genannt. Den Strömungsbereich hinter dem Zylinder, in dem diese Wirbel auftreten nennt man *Karmansche Wirbelstraße*.

[6] Aufgrund des Ähnlichkeitsgesetzes der Hydrodynamik werden die Abstände hinter dem Zylinder in Einheiten des Zylinderdurchmessers angegeben.

Man unterscheidet zwei wesentliche Entstehungsmechanismen der Nachlaufströmung. Bei kleinen Reynoldszahlen $Re < 1000$ wird der Zylinder nahezu laminar umströmt und die Karman-Wirbel entstehen erst hinter dem Zylinder durch Instabilitäten der Strömung. Ab einer Reynoldszahl von etwa $Re \approx 1000$, die von der Oberflächenbeschaffenheit des Zylinders abhängt, existieren bereits turbulente Wirbel bei der Ablösung der Strömung vom Zylinder, die dann auch die Entstehung der Karman-Wirbel beeinflusst, da diese durch Strömungsinstabilitäten entstehen. C. H. K. Williamson beschreibt in seinem Übersichtsartikel [72] desweiteren einige Zwischenbereiche. Da in dieser Arbeit jedoch Strömungen mit hoher Reynoldszahl untersucht werden sollen, sei hier darauf nicht weiter eingegangen. Bei diesen hohen Reynoldszahlen treten die Karman-Wirbel demnach nicht mehr regelmäßig, sondern in statistischer Abfolge auf. Damit ist auch die Untersuchung der Strömung in diesem Bereich mit herkömmlichen Methoden nur noch sehr eingeschränkt möglich. Es müssen Methoden verwendet werden, die den stochastischen Anteil mit berücksichtigen. Näheres dazu in Kapitel 5.

Bei größerer Entfernung zum Zylinder zerfallen die Karman-Wirbel wieder und es entstehen turbulente Wirbel. Für Abstände $X > 48D$ sind nahezu alle regulären Wirbelstrukturen zur Turbulenz zerfallen [70]. Bei höherer Reynoldszahl tritt dieses Verhalten aufgrund der größeren intrinsischen Instabilitäten eher auf. Auch bildet sich die turbulente Kaskade durch den stochastischen Anteil schneller aus. Abbildung 3.18 zeigt eine Visualisierung einer Zylinderströmung in einem größeren Abstand zum Zylinder.

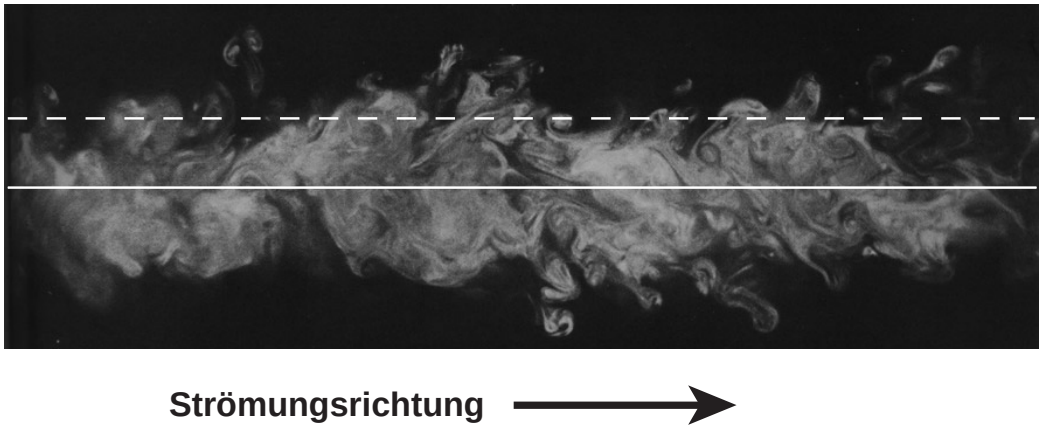


Abbildung 3.18: Visualisierung der Nachlaufströmung im Fernfeld hinter einem Zylinder. (aus [27]).

Der turbulente Charakter im Zentrum (durchgezogene Linie) der Nachlaufstömung ist deutlich zu erkennen. Für große Abstände ($X > 100\,D$) wird die mittlere Geschwindigkeit der Strömung selbstähnlich, d. h. die in verschiedenen Abständen gemessenen Geschwindigkeitsprofile fallen nach einer

Normierung aufeinander. Für die Standardabweichung und höhere Momente ist der Abstand, an dem diese Größen selbstähnlich werden noch größer (näheres dazu in [64]).

Im Randbereich (gestrichelte Linie in Abbildung 3.18) ist die Wechselwirkung der äußeren laminaren Schichten mit dem turbulenten Nachlauf zu beobachten. Dieser Bereich ist gekennzeichnet durch sich unregelmäßig abwechselnde turbulente und laminare Phasen. Der Analyse und stochastischen Beschreibung dieses Randbereichs hat sich Frau Birgit Reisner aus unserer Arbeitsgruppe im Rahmen ihrer Dissertation verschrieben. Daher soll hier nicht im Detail darauf eingegangen werden. Erste Ergebnisse sind in [51] zusammengefasst.

3.3.2 Beschreibung der Messreihen mit Charakterisierung

Wie bereits zuvor bei der Gitterströmung sollen auch für die Zylinderströmung vor der statistischen Analyse zunächst die grundlegenden Längenmaße der turbulenten Strömung betrachtet werden. Wie bereits beschrieben, sind diese wichtig, um die Längenskalenbereiche der statistischen Analyse abzugrenzen, sowie die Stabilität der Strömung und Konsistenz der Messungen zu überprüfen. Leider werden solche Tests in der neueren Turbulenzliteratur sehr selten gemacht, so dass damit eine Unsicherheit bei der Güte der verwendeten Datenreihen besteht.

Abbildung 3.19 zeigt die ermittelten Längenskalen Kolmogorov-Länge η, Taylor-Länge λ und Integrale Länge L in Abhängigkeit von der Reynoldszahl einer Zylindermessung im Abstand $X = 30\,D$ bei einem Zylinder mit dem Durchmesser $D = 5\,cm$. Die Kolmogorvsche Länge η verhält sich analog zu η in der Gitterströmung (vgl. Abbildung 3.10 a). Auch die Taylorlänge λ zeigt den nach Gleichung (3.16) für die isotrope Turbulenz erwarteten Verlauf. Jedoch tritt hier ein Offset auf, der darauf schließen lässt, dass sich die Turbulenz noch nicht voll entwickelt hat.

Oft wird der oben angesprochene Selbstähnlichkeitsbereich in der Zylindernachlaufströmung als Kriterium für vollentwickelte Turbulenz verwendet. Dieser ist jenseits des Abstandes von $30\,D$ in der gezeigten Messung (s. o.). werden. Die Integrale Länge, in Abbildung 3.19 in Teil c) dargestellt, zeigt hier größere Schwankungen als in der Gitterströmung. Nimmt man an, dass die kohärenten Strukturen im noch nicht voll entwickelten Nachlauf noch nicht vollständig zerfallen sind, so werden sie sich auf die Autokorrelationsfunktion und damit auf die Berechnung der integralen Länge besonders auswirken. Dies erklärt die verglichen mit der Gitterströmung größeren Schwankungen bei den Werten der Integralen Länge.

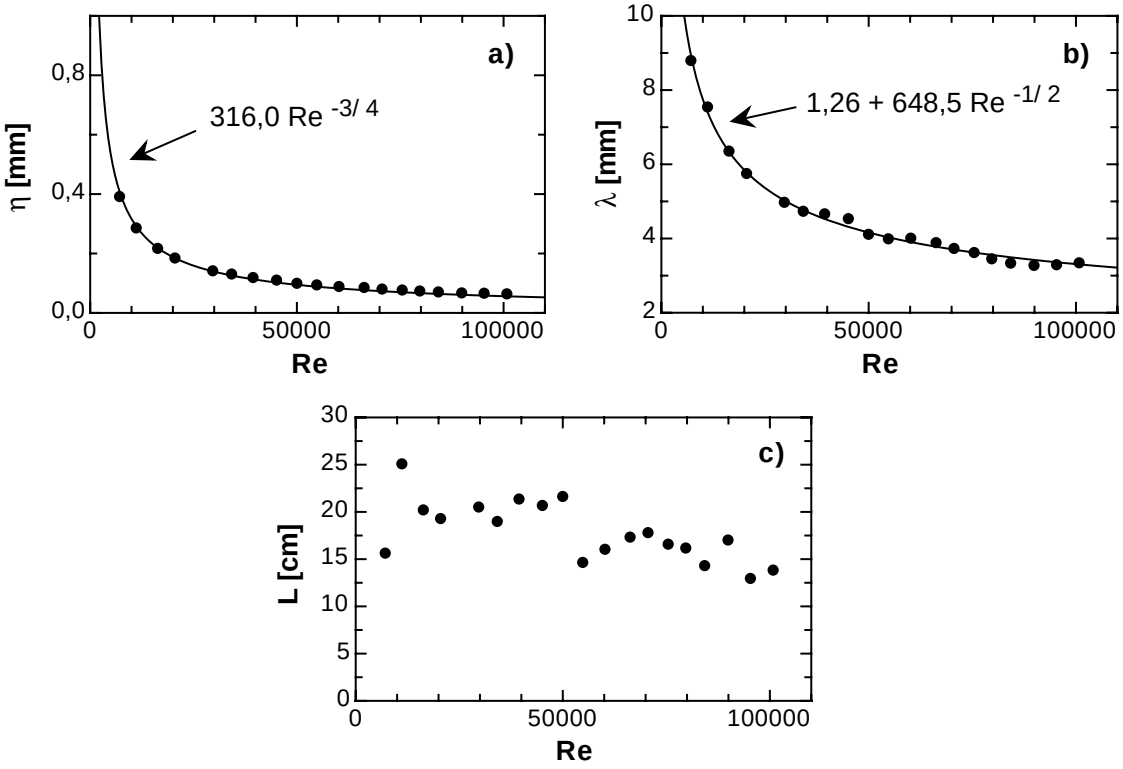


Abbildung 3.19: Charakteristische Längen in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit bei einer Zylinderströmung. a) Kolmogorovsches Mikrolängenmaß, b) Taylor-Länge, c) Integrale Länge.

Zum Vergleich mit der Gitterströmung ist in Abbildung 3.20 erneut die aus der Taylorlänge nach Gleichung (2.24) berechnete Taylorsche Reynoldszahl R_λ in Abhängigkeit von der 'direkten' Reynoldszahl Re gezeigt. Wie schon bei der Gitterströmung zeigt sich hier ein wurzelförmiger Verlauf. Jedoch tritt hier, wie bereits bei der Taylorlänge (Abbildung 3.19 b) ein kleiner Offset auf. Der Vergleich mit der Messung von Benzi et al. [9] zeigt einen prinzipiell ähnlichen Verlauf, jedoch sind dort wohl zu große Werte für Re_λ ermittelt worden, was einen sehr großen positiven Offset ergibt.

Die hier gezeigten Auswertungen zeigen auch für die Zylinderströmung ein konsistentes Verhalten. Dieses belegt die konstanten Strömungsbedingungen bei der Messwertaufnahme und die gute Qualität der Messreihen. Mit diesen Voraussetzungen können nun weitere Untersuchungen mit den unterschiedlichen Auswertemethoden durchgeführt werden.

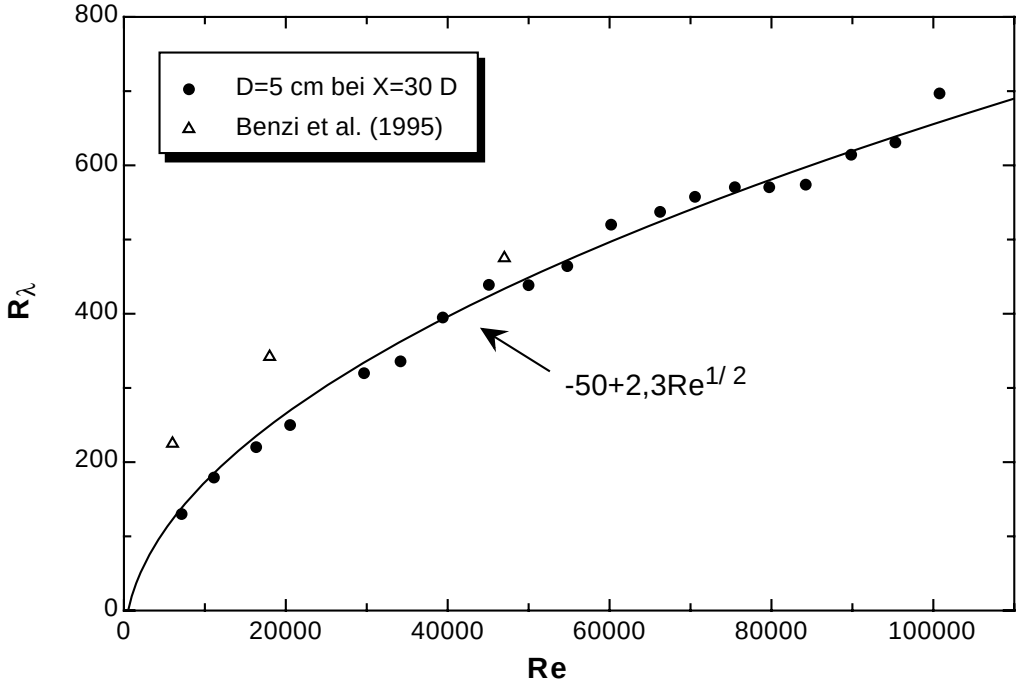


Abbildung 3.20: Taylorsche Reynoldszahl R_λ in Abhängigkeit von der direkten Reynoldszahl Re für eine Zylinderströmung im Abstand $X = 30\,D$ mit $D = 5\,cm$. Zum Vergleich ist eine Messung von Benzi et al. [9] mit eingezeichnet (Symbol $\triangle$).

3.3.3 Analyse der Daten mit 'klassischen' Methoden

Analog zum Abschnitt über die Gitterströmungen sollen nun die selben Auswertungen für die Messungen im Zylindernachlauf durchgeführt werden. Aufgrund der Analogie werden die Ergebnisse in diesem Abschnitt relativ knapp dargestellt.

Momentenanalyse

Zunächst sei hier wieder ein Auszug einer Analyse mit der in der Turbulenzforschung weit verbreiteten Momentenanalyse, die zumeist mittels des ESS-Verfahrens (s. Abschnitt 2.4.2) durchgeführt wird, gezeigt. Exemplarisch sind hier Messungen der Nachlaufströmung der Zylinder mit $D = 5\,cm$ in $30\,D$ Entfernung, sowie bei $D = 2\,cm$ in $100\,D$ Entfernung des Sensors zum Zylinder dargestellt (Abbildung 3.21). Die Schwankungsbreite der Skalenexponenten ist größer, als bei der Gittermessung.[7] Es ergeben sich die Werte

[7] Wiederum geben die Fehlerbalken die Unsicherheit bei der Anpassung an. Wie oben diskutiert, gibt es größere, nicht quantitativ exakt zu fixierende Unsicherheiten, die im Verfahren begründet sind.

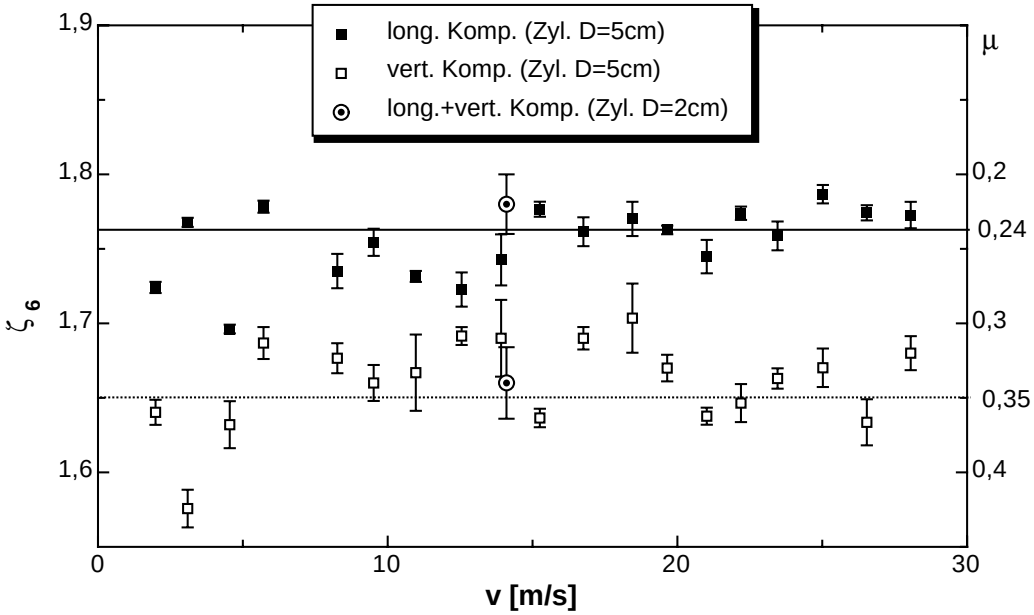


Abbildung 3.21: Skalenexponenten ζ_6 in Abhängigkeit von der Reynoldszahl bei der Zylindernachlaufströmung (Zylinderdurchmesser: 2 cm und 5 cm). Die Skalenexponenten wurden mittels der ESS-Analyse (S^6 gegenüber T^3) gewonnen. Der Abstand der Sensoren (X-Draht) vom Zylinder Betrug 30 D bei dem großen und 100 D bei dem kleinen Zylinder.

$\zeta_{6,l} = 1,76$ und $\zeta_{6,t} = 1,65$ für die Skalenexponenten der verschiedenen Komponenten. Die Werte für den Intermittenzfaktor $\mu = 2 - \zeta_6$ betragen $\mu_l = 0,24$ für die longitudinale und $\mu_t = 0,35$ für die transversale Geschwindigkeitskomponente. Sie sind damit größer, als bei der Messung an der Gitterströmung. Verglichen mit Literaturwerten ergeben sich übereinstimmende Resultate (z.B. [5]: $\mu = 0,26$ für verschiedene Strömungen;). Antonia et al. finden in [3] bei einer vergleichbaren Zylinderströmung mit $\zeta_{6,l}$ zwischen 1,74 und 1,79 ebenfalls nahezu den gleichen Wert. Allerdings finden sie für die transversalen Komponenten mit Werten um 1,35 kleinere Werte, als die hier ermittelten.

Charakterisierung der Verteilungen der Inkremente

Für die Messung in der Nachlaufströmung des kleinen Zylinders ($D = 2\,cm$) im Abstand von $100\,D$ sind in der folgenden Abbildung 3.22 exemplarisch die Häufigkeitsverteilungen der Geschwindigkeitsinkremente für verschiedene Längenskalen dargestellt.

Die Inkrementverteilungen zeigen, verglichen zur Gitterströmung, ein qualitativ gleiches Verhalten. Zum einen ist wiederum die unterschiedliche Schiefheit der Verteilungen der transversalen und der longitudinalen zu beobachten.

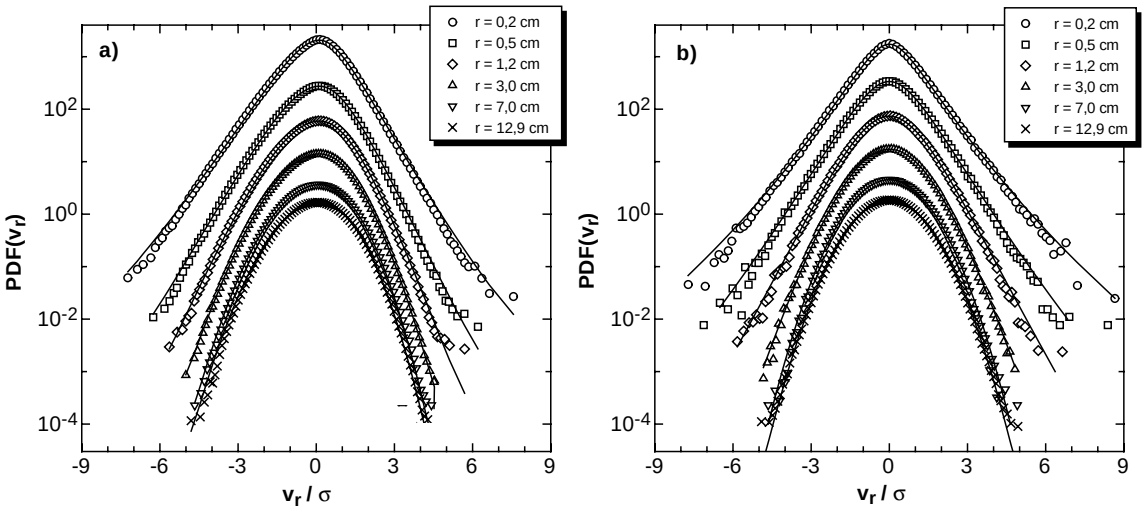


Abbildung 3.22: Häufigkeitsverteilungen der Inkremente der Longitudinalkomponente (a) und der Transversalkomponente (b) einer Zylinder-Nachlauf-Strömung im Abstand $X = 100\,D$ ($D = 2\,cm$) für verschiedene Längenskalen r (zur Orientierung: $\lambda = 2,9\,mm$ und $L = 19\,cm$).

Desweiteren ist die zunehmende Spitzheit unter Verringerung der Längenskala r wiederum deutlich zu erkennen. Um diese Veränderung auch quantitativ zu erfassen, kann die Castaing'sche Anpassung (Gleichung (2.50) in Abschnitt 2.4.3) herangezogen werden. Der sich dort ergebende von der Längenskala r abhängige Formparameter $\tilde{\lambda}(r)^2$ ist in der folgenden Grafik für die im vorigen Diagramm gezeigte Messung dargestellt.

Auch hier ist ein zur Gitterströmung qualitativ gleicher Verlauf zu beobachten. Wie schon in der ESS-Analyse anhand der ermittelten Werte für μ gesehen, ist die Intermittenz in der Zylinderströmung größer. Daher ergeben sich auch hier für den Formparameter $\tilde{\lambda}(r)^2$ größere Werte und auch eine größere Steigung der Anpassungsgeraden im Skalenbereich (siehe Abbildung 3.23 a). Es ergeben sich für die Steigungen der Anpassungsgeraden in Teil a) dieser Abbildung die folgende Werte: $\mu_l = 0,23$ und $\mu_t = 0,37$. Diese Werte stimmen sehr gut mit den Werten, die über die ESS-Analyse gewonnen wurden, überein. Dies unterstreicht damit die Geschlossenheit der Analyse, sowie die Güte der Messungen. Ebenso zeigt es, da beide Analysen vollentwickelte und isotrope Turbulenz voraussetzen, dass diese Voraussetzungen im Rahmen der Genauigkeit der Methoden auch erfüllt sind.

In Teil b) von Abbildung 3.23 ist, wie schon im Fall der Gitterströmung, ein zweiter markanter Bereich festzustellen. In der doppellogarithmischen Auftragung ergibt sich ein Bereich konstanter Steigung. Die Anpassung ergibt $\beta_l = -0,56$ und $\beta_t = -0,70$. Diese Werte für die einzelnen Komponenten sind verglichen mit der Gitterströmung ebenfalls größer. Wie bei der Gitter-

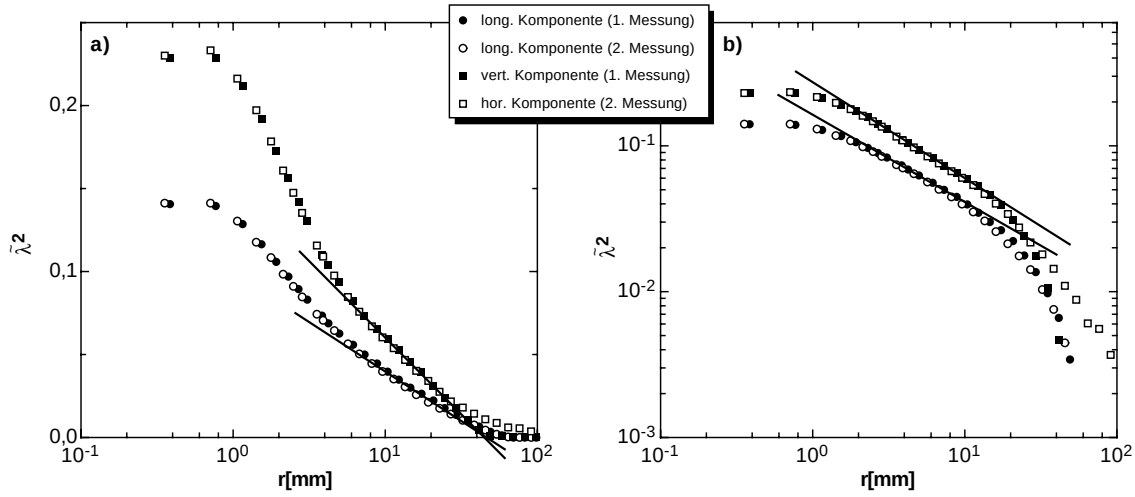


Abbildung 3.23: Darstellung des Formparameter $\tilde{\lambda}(r)^2$, erhalten aus der Anpassung nach Castaing (Gl. (2.50)), für die verschiedenen Komponenten des Geschwindigkeitsvektors der Zylinderströmung. In Teil a) ist die lineare, in Teil b) die logarithmische Auftragung, bei jeweils logarithmischer Längenskala r, gezeigt.

strömung ist das Resultat vergleichbar mit den in [17] dargestellten Ergebnissen. Da nicht geklärt ist, ob der Zahlenwert strömungsabhängig ist, kann aus der recht geringen Abweichung zu den dort dargestellten Resultaten keine eindeutige Aussage abgeleitet werden.

In der Einleitung wurde bereits herausgestellt, dass eine Charakterisierung von turbulenten Strömungen das Zusammenspiel der Strukturen der verschiedenen Längenskalen von großer Bedeutung ist. Um der dem näher zu kommen, wird nun im folgenden der stochastische Prozess in der turbulenten Kaskade direkt analysiert.

Kapitel 4

Methode der Markov-Analyse

4.1 Sinn und Ziel

Die im zweiten Kapitel beschriebenen Methoden zur Erfassung turbulenter Strömungen beschränken sich auf die Beschreibung spezieller Eigenschaften, die sich aus einer statistischen Betrachtung ableiten lassen. So gibt die Momentenanalyse Auskunft über Skalenverhalten und bei der Beschreibung nach Castaing wird der Verlauf der Verteilungen der Geschwindigkeitsinkremente für die verschiedenen Längenskalen erfasst. Da es jeweils mehrere mögliche statistische Vorgänge gibt, die ein solchermaßen beschriebenes Verhalten zeigen, ist mit diesen Methoden die Frage nach dem tatsächlichen statistischen Prozess, dem beispielsweise eine vorliegende Messung genügt, nicht zu beantworten. So kann zum Beispiel eine Funktion gefunden werden, die durch Iteration Zeitserien generiert, bei denen gleiches multifraktales Skalenverhalten, wie bei einer turbulenten Strömung zu beobachten ist [50]. Weitere Untersuchungen zeigten jedoch, dass der zugrundeliegende Mechanismus, der dieses Skalenverhalten erzeugt, sehr verschieden zur Turbulenz ist [31].

Wünschenswert wäre also ein Verfahren, das anhand von vorliegenden Messdaten den statistischen Prozess, der diesen Daten zugrunde liegt, so vollständig wie möglich erfasst. Natürlich müsste ein solchermaßen gefundener Prozess wiederum die Eigenschaften der oben aufgeführten klassischen Beschreibungsweisen zeigen. Im Jahre 1997 schlugen R. Friedrich und J. Peinke vor, die Statistik in der turbulenten Kaskade über einen Markov-Prozess zu beschreiben [28][29]. Ungewöhnlich, und deshalb wohl auch anfänglich durchaus mit heftiger Kritik belegt, war vor allem die Vorstellung, die Turbulenz als Markov-Prozess nicht zeitlich, sondern in der Längenskala aufzufassen, mit der die Geschwindigkeitsinkremente gebildet werden. Dabei spiegelt dieser Ansatz den Kaskadenprozess wider. Es ist also genau genommen eine Beschreibung des statistischen Prozesses, dem die Geschwindigkeits*inkremente* bei Veränderung des Inkrementabstandes unterliegen.

Im folgenden seien die wichtigsten Begriffe und Zusammenhänge zur Markov-Analyse kompakt eingeführt, da die Theorie der Markov-Prozesse zwar Grundlage aber nicht Untersuchungsgegenstand dieser Arbeit sind. Einen tieferen Einblick in die Theorie gibt das Buch von H. Risken [59], das auch dieser Zusammenfassung zugrunde liegt. Im Anschluss daran soll auf die praktische Umsetzung dieses Verfahrens zur Analyse von turbulenten Geschwindigkeitsmessdaten eingegangen werden.[1] Auch hier möchte ich eher einen Überblick geben, der nötig ist um die Umsetzung dieses Verfahrens in den folgenden Kapiteln nachvollziehen zu können. Weitergehende Details zur Umsetzung des Verfahrens können in [54] und in der Dissertation von Herrn Renner [53] nachgeschlagen werden.

4.2 Grundlegende Definitionen

Zur Untersuchung des stochastischen Prozesses in der turbulenten Kaskade wird die Markov-Analyse auf die durch Gleichung (2.36) definierten Geschwindigkeitsinkremente $\boldsymbol{v_r}$, die mittels Taylorhypothese aus einer Geschwindigkeitszeitserie $\boldsymbol{u}(t)$ gewonnen werden, angewandt. Da das Verfahren noch recht neu ist, wurden die Analysen jeweils nur auf eine Komponente des Geschwindigkeitsvektors angewandt. Die Formulierung des Verfahrens soll daher eindimensional erfolgen. Desweiteren werden der Übersichtlichkeit halber im Folgenden die Geschwindigkeitsinkremente $v_{r_1}, v_{r_2}, ...$ mit dem Inkrementabstand $r_1, r_2, ...$ kurz mit $v_1, v_2, ...$ bezeichnet.[2]

Die Verbundwahrscheinlichkeit

Der wichtigste Grundbegriff ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(v_1, r_1)$ eines Geschwindigkeitsinkrementes v_1 (beim Inkrementabstand r_1) und wurde bereits in Kapitel 2 eingeführt. Dieser Begriff kann zu der sogenannten *Verbundwahrscheinlichkeit* oder auch *Mehrpunktwahrscheinlichkeit*

$$p(v_1, r_1; ...; v_n, r_n) \tag{4.1}$$

erweitert werden, die die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Inkremente $v_1, ..., v_n$ bei den Längenskalen $r_1, ..., r_n$ angibt.

[1] Einen wesentlichen Anteil an dieser Umsetzung hatte auch Herr Christoph Renner aus der gleichen Arbeitsgruppe, der hier ausdrücklich erwähnt sei.

[2] Zur Erinnerung: Die Inkremente v_i werden zwar für verschiedene Längenskalen r_i, aber am selben Ort $\boldsymbol{x}$ gebildet (s. Gl. (2.36)).

Die bedingte Wahrscheinlichkeit

Für die Beschreibung eines statistischen Prozesses ist desweiteren der Begriff der *bedingten Wahrscheinlichkeit* $p(v_1, r_1|v_2, r_2)$ von großer Bedeutung. Er gibt die Wahrscheinlichkeitsverteilung dafür an, dass v_1 auftritt unter der Bedingung, dass zuvor, im Sinne des Prozessablaufs, v_2 angenommen wurde. Die Prozessvariable ist im vorliegenden Fall der turbulenten Kaskade der Inkrementabstand r und damit die Abfolge der Prozessschritte durch die Inkrementabfolge $r_n > .. > r_2 > r_1$ gegeben. Der Prozess läuft, wie in Kapitel 2 beschrieben, von großen zu kleinen Längenskalen. Man errechnet die bedingte Wahrscheinlichkeit durch

$$p(v_1, r_1|v_2, r_2) \;=\; \frac{p(v_1, r_1; v_2, r_2)}{p(v_2, r_2)} \;. \tag{4.2}$$

Ebenso lässt sich dieser Begriff erweitern, indem mehrere Bedingungen gestellt werden und man erhält

$$p(v_1, r_1|v_2, r_2; ...; v_n, r_n) \;=\; \frac{p(v_1, r_1; v_2, r_2; ...; v_n, r_n)}{p(v_2, r_2; ...; v_n, r_n)} \;. \tag{4.3}$$

Für die bedingten Wahrscheinlichkeiten wird auch häufig der Begriff *Übergangswahrscheinlichkeit* verwendet.

Die Wahrscheinlichkeit für ein bestimmtes Ereignis (z. B. v_1 bei r_1) ist durch die Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(v_2, r_2)$ an einem beliebigen vorhergehenden Prozessschritt und die zugehörige bedingte Wahrscheinlichkeit $p(v_1, r_1|v_2, r_2)$ gegeben. Es gilt

$$p(v_1, r_1) = \int p(v_1, r_1|v_2, r_2) p(v_2, r_2) dv_2. \tag{4.4}$$

Der Begriff des stochastischen Prozesses

Der oft verwendete Begriff des *stochastischen Prozesses* bezeichnet den Vorgang, der einer Realisierung einer Zufallsvariablen (hier $\boldsymbol{v_r}$) zugrunde liegt. Diese allgemeine Definition reicht von vollständig deterministischen Prozessen, bei denen dann die Phasenraumvariable, obwohl eindeutig festgelegt, als Zufallsvariable aufgefasst wird, bis hin zu vollständig zufälligen Prozessen ohne einen deterministischen Anteil.

Die Realisierung des Prozesses kann desweiteren in verschiedener Weise von vorhergehenden Realisierungen abhängen. Diesbezüglich lassen sich stochastische Prozesse in drei Kategorien einteilen:

- Prozesse, die nicht von der vorhegegangenen Realisierung abhängig sind.

- Prozesse, bei denen die aktuelle Realisierung nur vom unmittelbar Vorangegangenen abhängt.
- Prozesse, die von mehreren vergangenen Realisierungen abhängen.

Prozesse der ersten Kategorie haben demnach die Eigenschaft, dass jeder angenommene Zustand vollständig unabhängig von früheren Realisierungen ist. Es ist kein Gedächtnis ('Memory-Effekt') im Prozessablauf vorhanden. In diesem Fall ist die bedingte Wahrscheinlichkeit gleich der nicht bedingten Wahrscheinlichkeit eines Zustandes

$$p(v_1, r_1|v_2, r_2) = p(v_1, r_1). \tag{4.5}$$

Für einen reinen Zufallsprozess faktorisieren daher die Verbundwahrscheinlichkeiten, d. h. es gilt:

$$p(v_1, r_1; ...v_N, r_N) = p(v_1, r_1)...p(v_N, r_N)\ . \tag{4.6}$$

Die gesamte Information eines solchen reinen Zufallsprozesses ist demnach bereits durch die einfache Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(v_i, r_i)$ (i beliebig) gegeben.

Die Zustände eines realen physikalischen Systems, das durch kontinuierliche Variablen beschrieben wird, besitzen bei genügend dichter Abfolge (in Prozessrichtung) eine endliche Korrelation. Die Zustände sind also dann nicht mehr unabhängig voneinander. Daher können reine Zufallsprozesse solche physikalischen Systeme nicht beschreiben.

Eine vollständige Charakterisierung eines stochastischen Prozesses erhält man, wenn die Verteilungsfunktionen sowie die Übergangswahrscheinlichkeiten an allen Stellen im Prozessverlauf bekannt sind. Idealerweise sind die Verteilungsfunktionen und die Übergangswahrscheinlichkeiten durch eine Differentialgleichung bestimmt, so dass mit Kenntnis dieser Gleichung der gesamte Prozess bestimmt ist. Eine solche Differentialgleichung wird auch *Master-Gleichung* genannt.

Alle weiteren benötigten Begriffe wurden bereits in Kapitel 2 eingeführt. Damit können nun die wichtigsten Grundlagen und Folgerungen zur Markov-Analyse dargestellt werden.

4.3 Der Markov-Prozess

Als zweite Kategorie der oben beschriebenen allgemeinen stochastischen Prozesse besitzen *Markov-Prozesse* die Eigenschaft, dass die bedingte Wahrscheinlichkeit im Gegensatz zum reinen Zufallsprozess von dem unmittelbar

vorher (wieder in Prozessrichtung) angenommenen Wert und auch **nur** von diesem abhängt. Überträgt man dies auf die turbulente Kaskade, so gilt also im Falle eines Markov-Prozesses

$$p(v_1, r_1|v_2, r_2; ...; v_n, r_n) \;=\; p(v_1, r_1|v_2, r_2)\ . \tag{4.7}$$

mit $r_1 < r_2 < .. < r_n$. Damit folgt, dass die Verbundwahrscheinlichkeit n-ter Ordnung durch das Produkt von bedingten Wahrscheinlichkeiten wie folgt ausgedrückt werden kann:

$$p(v_1, r_1; ...v_n, r_n) = p(v_1, r_1|v_2, r_2)....p(v_{n-1}, r_{n-1}|v_n, r_n)p(v_n, r_n)\ . \tag{4.8}$$

Die bedingten Wahrscheinlichkeiten werden auch oft *Übergangswahrscheinlichkeiten* genannt und lassen sich (mit der Abkürzung $\int = \int_{-\infty}^{\infty}$) über

$$p(v_1, r_1|v_2, r_2) \;=\; \frac{p(v_1, r_1; v_2, r_2)}{p(v_2, r_2)} \;=\; \frac{p(v_1, r_1; v_2, r_2)}{\int p(v_1, r_1; v_2, r_2)dv_1} \tag{4.9}$$

durch Verbundwahrscheinlichkeiten zweiter Ordnung ausdrücken. Damit ist ein Markov-Prozess vollständig über die Zweipunktwahrscheinlichkeiten $p(v_i, r_i;\, v_{i+1}, r_{i+1})$ charakterisiert.

Neben den Markov-Prozessen, bei denen die Wahrscheinlichkeit in einem Prozessschritt lediglich durch den unmittelbaren Vorgänger festgelegt ist, gibt es weitere Prozesse, deren 'Gedächtnis' weiter zurück reicht. Die Verteilungen bei diesen *Nicht-Markov-Prozessen* hängen demnach von mehreren, also mindestens zwei, vorher angenommenen Zuständen ab. Eine weitere Klassifizierung wird im allgemeinen nicht durchgeführt. Es ist möglich, die gerade angesprochenen Nicht-Markovschen Prozesse über eine Erweiterung der Dimension, in der sie beschrieben werden, zu Markov-Prozessen zu machen. Dabei hängt die Anzahl der erforderlichen Dimensionen von der Zahl der zu berücksichtigenden Vorzustände, also der Länge des Gedächtnisses ab [59].

4.3.1 Die Chapman-Kolmogorov-Gleichung

Eine wichtige Folgerung aus den Markov-Eigenschaften ist die *Chapman-Kolmogorov-Gleichung*.

$$p(v_1, r_1|v_2, r_2) = \int p(v_1, r_1|v_{r'}, r')p(v_{r'}, r'|v_2, r_2)dv_{r'} \tag{4.10}$$

mit $r_1 < r' < r_2$. Die bedingte Wahrscheinlichkeit, oder Übergangswahrscheinlichkeit von r_2 nach r_1, kann also über Übergangswahrscheinlichkeiten mit einem beliebig wählbaren Zwischenschritt bestimmt werden. Dabei muss

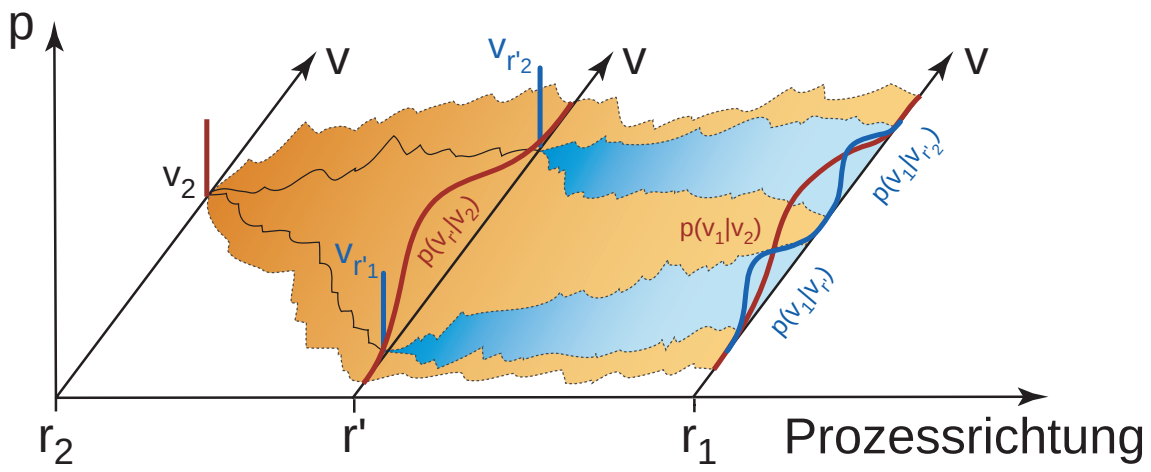


Abbildung 4.1: Illustration zur Chapman-Kolmogorov-Gleichung. Ausgehend von einem festen Wert v_2 bei r_2 entwickelt sich der Prozess über r' nach r_1. Bei r' sind exemplarisch zwei Zustände $v_{r'_1}$, $v_{r'_2}$ markiert, deren Übergangswahrscheinlichkeit nach r_1 dort durch die blauen Verteilungen dargestellt sind (nach [59]).

über alle möglichen Zustände in diesem Zwischenschritt integriert werden, was die folgende Abbildung 4.1 veranschaulicht.

Da alle Größen der Gleichung (4.10) direkt aus den Messdaten bestimmt werden können, ist damit eine Überprüfung, ob die Messdaten die Chapman-Kolmogorov-Gleichung erfüllen, direkt möglich. Die Chapman-Kolmogorov-Gleichung ist eine notwendige Bedingung für einen Markov-Prozess, sie ist allerdings nicht hinreichend. Es gibt jedoch nur sehr wenige nicht markovsche Prozesse, bei denen diese Gleichung trotzdem gilt [29]. Daher ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sich um einen Markov-Prozess handelt, sehr groß, falls die Chapman-Kolmogorov-Gleichung erfüllt ist. Der Aufwand ist zu groß, um die Gültigkeit dieser Gleichung für den gesamten Prozess zu überprüfen. Daher muss in der Praxis eine exemplarische Überprüfung genügen.

4.3.2 Die Kramers-Moyal-Entwicklung

Für einen Markov-Prozess kann die Master-Gleichung (siehe Abschnitt 4.2), die die Verteilungsfunktionen an allen Stellen im Prozessverlauf beschreibt, über eine Entwicklungsreihe dargestellt werden [59]. Ausgehend von Gleichung (4.4), die man für zwei dicht aufeinanderfolgende Prozessschritte aufstellt, kann man eine Taylorentwicklung durchführen, die auf

$$-r\frac{p(v_1, r_1 + \Delta r) - p(v_1, r_1)}{\Delta r} \;=$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{\partial}{\partial v_1}\right)^k \frac{r}{k!\,\Delta r} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} (\tilde{v} - v)^k \; p\left(\tilde{v}, r - \Delta r | v, r\right) \; d\tilde{v}\right] p(v_1, r_1) \quad (4.11)$$

führt.[3] Nun kann man den Grenzübergang $\Delta r \rightarrow 0$ und damit $\tilde{v} \rightarrow v$ durchführen und man erhält die so genannte *Kramers-Moyal-Entwicklung*

$$-\,r\,\frac{\partial}{\partial r}\,p(v, r) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{\partial}{\partial v}\right)^k D_k(v, r)\,p(v, r) \quad (4.12)$$

mit den Abkürzungen

$$D_k(v, r) \;=\; \lim_{\Delta r \rightarrow 0} M_k(v, r, \Delta r) \;, \text{mit} \quad (4.13)$$

$$M_k(v, r, \Delta r) \;=\; \frac{r}{k!\,\Delta r} \int_{-\infty}^{+\infty} (\tilde{v} - v)^k \; p\left(\tilde{v}, r - \Delta r | v, r\right) \; d\tilde{v}. \quad (4.14)$$

Diese Koeffizienten $D_k(v, r)$ werden dem Namen der Entwicklung folgend *Kramers-Moyal-Koeffizienten* genannt. Da die bedingten Wahrscheinlichkeiten direkt aus den Daten bestimmbar sind, können die Koeffizienten M_k ebenfalls direkt aus den Daten gewonnen werden. Es sind keine zusätzlichen Annahmen, wie zum Beispiel das Skalenverhalten bei der Momentenanalyse, notwendig. Allerdings bereitet hier der Grenzübergang $\Delta r \rightarrow 0$ einige Schwierigkeiten. Darauf soll in Abschnitt 4.4, in dem die Durchführung der hier beschriebenen Methode anhand von Messdaten beschrieben wird, näher eingegangen werden.

Man kann die Kramers-Moyal-Entwicklung ebenso für die Übergangswahrscheinlichkeiten aufstellen.

$$-\,r\,\frac{\partial}{\partial r}\,p(v, r|v_0, r_0) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{\partial}{\partial v}\right)^k D_k(v, r)\,p(v, r|v_0, r_0) \quad (4.15)$$

Ein Markov-Prozess ist, wie im vorigen Kapitel gesagt, durch die Übergangswahrscheinlichkeiten vollständig bestimmt. Damit besitzt man also nach der Bestimmung der Kramers-Moyal-Koeffizienten über Gleichung (4.15) eine vollständige Beschreibung des Markov-Prozesses (s. Gleichung (4.8)).

[3] Das negative Vorzeichen auf der linken Seite von Gleichung (4.11) ist durch den Prozessablauf, der von großen nach kleinen Skalen erfolgt, bedingt.

4.3.3 Die Fokker-Planck Gleichung

Zwar hat man über die Kramers-Moyal-Entwicklung eine Beschreibung des Markov-Prozesses erreicht, jedoch ist eine Reihe mit unendlich vielen Koeffizienten ziemlich unhandlich. sogenannte *Theorem von Pawula* eine wesentliche Vereinfachung. Es lautet (nach [59]):

Für eine positive Übergangswahrscheinlichkeit P kann die Kramers-Moyal-Entwicklung (4.15) entweder nach dem ersten oder zweiten Term abbrechen. Falls jedoch nicht, so enthält die Entwicklung unendlich viele Terme.

Falls dieses Theorem erfüllt ist, also die Entwicklung spätestens nach dem 2. Term abbricht, so spricht man von einer *Fokker-Planck-Gleichung* oder auch *Kolmogorov-Gleichung*. Sie lautet mit den oben (Gl. 4.13) definierten Koeffizienten.

$$-r\,\frac{\partial}{\partial r}\,p(v,r) \;=\; \left\{ -\frac{\partial}{\partial v}\,D_1(v,r) \;+\; \frac{\partial^2}{\partial v^2}\,D_2(v,r) \right\}\, p(v,r), \qquad (4.16)$$

beziehungsweise für die Übergangswahrscheinlichkeit

$$-r\,\frac{\partial}{\partial r}\,p(v,r|v_0,r_0) \;=\; \left\{ -\frac{\partial}{\partial v}\,D_1(v,r) \;+\; \frac{\partial^2}{\partial v^2}\,D_2(v,r) \right\}\, p(v,r|v_0,r_0). \qquad (4.17)$$

Der Inhalt der geschweiften Klammern $\{...\}$ ist dabei als Differentialoperator aufzufassen, der auf die dahinter stehende Wahrscheinlichkeitsverteilung p wirkt.

Man kann eine Fokker-Planck-Gleichung direkt in eine so genannte *Langevin-Gleichung* überführen. Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung für die Zustandsvariable des stochastischen Prozesses, die damit eine Entwicklungsgleichung für eine einzelne Realisierung des Prozesses darstellt. Sie lautet mit den obigen Koeffizienten

$$-r\frac{\partial}{\partial r}v(r) = D_1(v,r) + \sqrt{D_2(v,r)}\Gamma(r), \qquad (4.18)$$

wobei $\Gamma(r)$ einen reinen δ-korrelierten Rauschterm (Wiener-Prozess) bezeichnet.[4]

Diese Darstellung als Langevin-Gleichung erlaubt folgende Interpretation der Koeffizienten D_1 und D_2. D_1 gibt den deterministischen Anteil des Prozesses wieder und wird daher auch *Drift-Koeffizient genannt*. D_2 beschreibt

[4] Der Rauschterm der Langevin-Gleichung ist in der sogenannten Ito-Definition angegeben. Details dazu können beispielsweise in [59] nachgeschlagen werden.

als Vorfaktor des Rauschterms Γ dessen Einfluss auf die Dynamik und wird daher *Diffusionskoeffizient* genannt. Ist beispielsweise D_2 nicht von der Zustandsvariablen v abhängig, so hat man einen *additiven* Rauscheinfluss. Im anderen Fall spricht man ganz allgemein von *multiplikativem Rauschen*.

4.3.4 Verbindung zur 'klassischen' Turbulenztheorie

Die Gleichungen des stochastischen Prozesses können mit der gerade besprochenen Methode direkt aus den Datenreihen extrahiert werden ohne dass, bis auf die (nachprüfbare) Voraussetzung, dass ein Markov-Prozess vorliegt, Annahmen gemacht werden müssen. Dies ist ein großer Vorteil dieses Auswerteverfahrens. Allerdings stellt sich natürlich die Frage nach einem Bezug zur klassischen Turbulenztheorie. Denn trotz deren Einschränkungen müssen gewisse Berührungspunkte vorhanden sein, sollen sie die gleiche Physik beschreiben. Der Idealfall wäre natürlich, eine direkte Verbindung zur Navier-Stokes-Gleichung (2.2) herzustellen. Dies ist jedoch ein äußerst schwieriges Unterfangen und man ist derzeit noch recht weit davon entfernt. Daher wurde zunächst versucht, diese Methode mit anderen 'klassischen' Ergebnissen (s. Kapitel 2), die aus Vereinfachungen, bzw. Idealisierungen (Isotropie, Homogenität...) und physikalischen Modellvorstellungen (z.B. Kaskaden-Modell) resultieren, in Verbindung zu setzen. Diese Modellvorstellungen und Annahmen führen, wie in Kapitel 2 dargestellt zu der Voraussage Kolmogorovs aus dem Jahre 1962 für den Skalenexponenten ζ_n, die hier noch einmal wiederholt werden soll:

$$\zeta_n = \frac{n}{3} - \frac{\mu}{18} n(n-3). \quad (\text{vgl.Gl.}(2.44)\text{f.}) \tag{4.19}$$

Multipliziert man die Fokker-Planck-Gleichung für die Inkrement-Verteilungen (Gl. (4.16)) mit v_r^n, so erhält man aufgrund der Definition (2.37) eine Fokker-Planck-Gleichung für die Strukturfunktionen. Sie lautet

$$-\,r\,\frac{\partial}{\partial r}\,S_v^n(r) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} v^n \left\{ -\,\frac{\partial}{\partial v}\,D_1(v,r) \;+\; \frac{\partial^2}{\partial v^2}\,D_2(v,r) \right\} p(v,r)\,dv, \tag{4.20}$$

Besitzen die Kramers-Moyal-Koeffizienten die Form

$$D_1(v,r) \;=\; -\gamma v \tag{4.21}$$

$$D_2(v,r) \;=\; \beta v^2, \tag{4.22}$$

so ergibt sich durch Einsetzen und partielle Integration von Gleichung (4.20) die Gleichung

$$-\,r\,\frac{\partial}{\partial r}\,S_v^n(r) \;=\; (-\gamma n + \beta n(n-1)) S_v^n(r) \tag{4.23}$$

und damit

$$S_v^n(r) \;\propto\; r^{\zeta_n},\ \text{mit}\ \zeta_n = \gamma n - \beta n(n-1). \tag{4.24}$$

Man erhält also bei den so gewählten Kramers-Moyal-Koeffizienten ein Skalenverhalten der Strukturfunktionen. Der Skalenexponent lässt sich als

$$\zeta_n = (\gamma - 2\beta)n - \beta n(n-3) \tag{4.25}$$

umschreiben. Eine Übereinstimmung mit der Kolmogorovschen Vorhersage (Gl. 4.19) erhält man daher, falls

$$\beta = \frac{\mu}{18} \quad \text{und} \tag{4.26}$$

$$\gamma = \frac{1}{3} + 2\beta. \tag{4.27}$$

Es kann also eine Beziehung der Beschreibung der Verteilungen der Inkremente in der turbulenten Kaskade mit den Kolmogorovschen Annahmen hergestellt werden. In der Arbeit von Amblard und Brossier [1] wird gezeigt, dass das Kaskadenmodell von Castaing (s. Abschnitt 2.4.3) äquivalent zu der Markov-Beschreibung mit einem reinen multiplikativen Rauschanteil ist. Desweiteren erweiterte Dubrulle in [26] das Castaingmodell um einen weiteren additiven Rauschanteil. Eine weitergehende Darstellung dieser Sachverhalte würde hier zu weit führen und sind gegebenenfalls in den angegebenen Zitaten nachzulesen. Desweiteren wurde von J. Davoudi und M. R. R. Tabar in [25] eine Ableitung der Kramers-Moyal-Koeffizienten aus einem von V. Yakhot in [74] vorgeschlagenen Turbulenzmodell gezeigt. Es ergibt sich dabei zum Beispiel, dass die höheren Kramers-Moyal-Koeffizienten ($n > 2$) gegen Null gehen, so dass tatsächlich eine Beschreibung turbulenter Strömungen durch die Fokker-Planck-Gleichung gerechtfertigt wird. Ebenfalls konnten J. Davoudi und M. R. R. Tabar zeigen [24], dass die von V. L'vov und I. Proccacia in [43] abgeleiteten Fusionsregeln, die bei der Verkleinerung der Längenskala r gelten und von R. Benzi et al. in [8] experimentell bestätigt wurden, mit der Beschreibung durch Markov-Prozesse konform sind.

4.4 Markov-Analyse mit Daten (die Realität)

Nachdem im vorigen Abschnitt die Grundzüge der Markov-Analyse vorgestellt wurden, wird nun die Vorgehensweise erläutert, wie diese Analyse-Methode in der Praxis umzusetzen ist. Die Hauptschwierigkeiten hierbei liegen einmal in dem Nachweis der Markov-Eigenschaften sowie in der Bestimmung der Kramers-Moyal-Koeffizienten, die ja als Grenzwerte definiert sind. Es sei an

dieser Stelle noch einmal erwähnt, dass gegenwärtig intensiv an dieser praktischen Durchführung des Verfahrens gearbeitet wird, das Folgende also eine Momentaufnahme darstellt. Ein Großteil dieser praktischen Umsetzung wurde in unserer Arbeitsgruppe um Prof. Peinke und in Zusammenarbeit mit Prof. Friedrich (Stuttgart, jetzt Münster) durchgeführt.

4.4.1 Überprüfen der Markoveigenschaft

Test über die Chapman-Kolmogorov-Gleichung

In Abschnitt 4.3.1 wurde die Chapman-Kolmogorov-Gleichung

$$p(v_1, r_1|v_2, r_2) = \int p(v_1, r_1|v_{r'}, r')p(v_{r'}, r'|v_2, r_2)dv_{r'} \tag{4.28}$$

als Folgerung aus den Markov-Eigenschaften eingeführt, die an exemplarischen Punkten an einem Datensatz nachgeprüft werden kann. Gilt diese Gleichung, so ist dies ein sehr starkes Indiz, wenn auch noch kein Beweis für die Markov-Eigenschaft des Prozesses.

Als Beispiel zeigt Abbildung 4.2 in (a und c) eine Überlagerung von Kontur-Plots der linken und rechten Seite der Chapman-Kolmogorov-Gleichung für die isotrope Gitterströmung in $30\,M$ Entfernung zum Gitter[5].

Die Geschwindigkeitsinkremente werden dabei durch den Grenzwert der Strukturfunktion 2. Ordnung

$$\sigma_\infty^2 \;=\; \lim_{r\to\infty} \left\langle\, v_r^2 \,\right\rangle . \tag{4.29}$$

normiert. Diese Normierung stellt die Vergleichbarkeit zwischen unterschiedlichen Datensätzen her und wird daher auch im folgenden bei der Markov-Analyse verwendet. Über die Definition der Strukturfunktion (Gleichung (2.37)) ergibt sich der folgende Zusammenhang zur Standardabweichung σ_u der Geschwindigkeitszeitserie $u(t)$

$$\sigma_\infty = \sqrt{2}\sigma_u, \tag{4.30}$$

der zur Bestimmung von σ_∞ verwendet wurde. Bei der Abbildung 4.2 zugrunde liegenden Messreihe beträgt $\sigma_\infty = 0,93\,m/sec$. Man erkennt eine hervorragende Übereinstimmung der Konturlinien. Etwas genauer kann man die Übereinstimmung in den darunter dargestellten Schnitten erkennen. Die Chapman-Kolmogorov-Gleichung ist für diese Fälle also sehr gut erfüllt.

Da die Gültigkeit der Chapman-Kolmogorov-Gleichung nur ein, wenn auch starkes, Indiz für einen Markov-Prozess ist, ist es wünschenswert weitere Tests zur Untermauerung der Markov-Eigenschaft einer Datenreihe durchzuführen.

[5] Das Gitter besitzt eine Maschenweite von $5\,cm$ (s. dazu auch Kapitel 3.2).

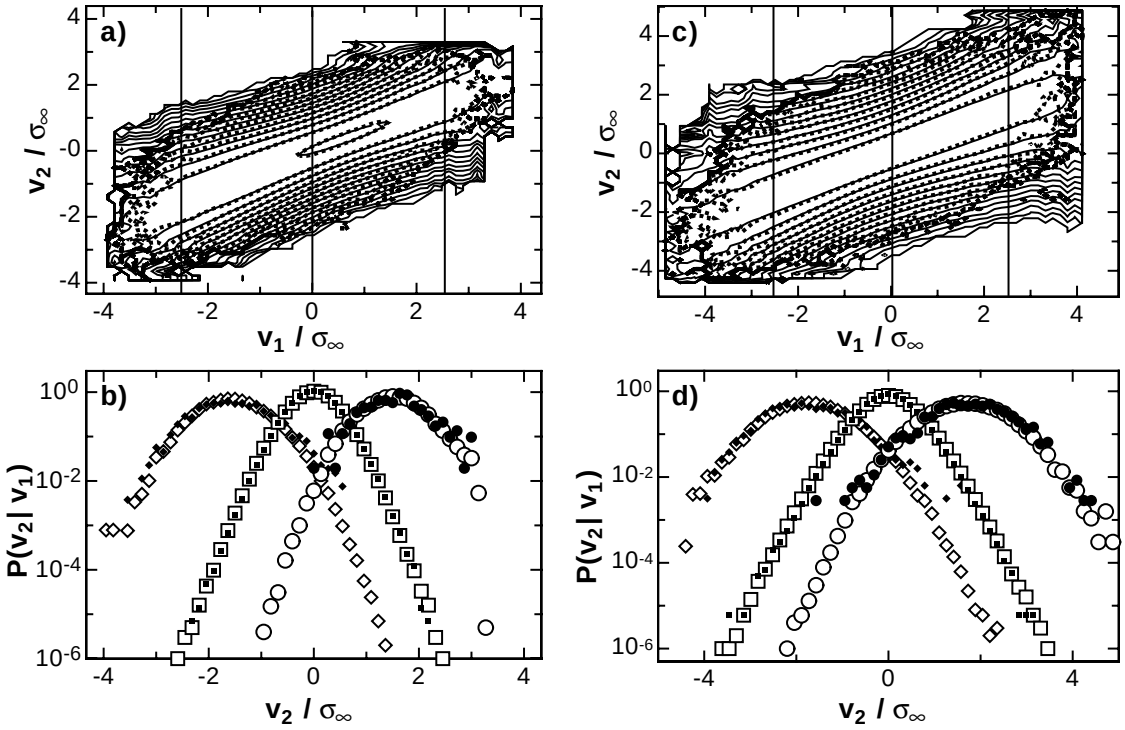


Abbildung 4.2: Überprüfung der Chapman-Kolmogorov-Gleichung in der isotropen Gitterströmung für die longitudinale (a+b) sowie die transversale Komponente (c+d) bei den Längenskalen $r_1 = 5,8\,mm(\approx 3\lambda)$, $r' = 7,7\,mm(\approx 4\lambda)$ und $r_2 = 9,7\,mm(\approx 5\lambda)$. Oben sind Kontur-Plots (logarithmische Skala) jeweils für die direkt bestimmten (gestrichelt) und die über einen Zwischenschritt integrierten Übergangswahrscheinlichkeiten überlagert dargestellt. Darunter sind charakteristische Schnitte (oben markiert) gezeigt. Offene Symbole entsprechen den integrierten und geschlossene Symbole den direkten Übergangswahrscheinlichkeiten.

Direkter Test über die Definition des Markov-Prozesses

Es wäre am besten, die Markov-Eigenschaft direkt anhand der ursprünglichen Definition des Markov-Prozesses

$$p(v_1, r_1|v_2, r_2; ...; v_n, r_n) \;=\; p(v_1, r_1|v_2, r_2)\;. \tag{4.31}$$

zu überprüfen. Die Berechnung der linken Seite dieser Gleichung ist allerdings in der Praxis nur für kleine n ($n < 5$) durchführbar, so dass über dieses Vorgehen ebenfalls kein eindeutiger Beweis der Markov-Eigenschaften möglich ist. Es lassen sich jedoch weitere Indizien für die Gültigkeit der Markov-Eigenschaften sammeln. Gleiches gilt für einen Test über die mehrdimensio-

nalen Wahrscheinlichkeiten mittels Gleichung (4.8).[6] Für $n = 3$ sei hier noch der Test über die bedingten Wahrscheinlichkeiten nach obiger Gleichung (4.31) für die Gitterströmung gezeigt. Abbildung 4.3 zeigt die einfach und doppelt

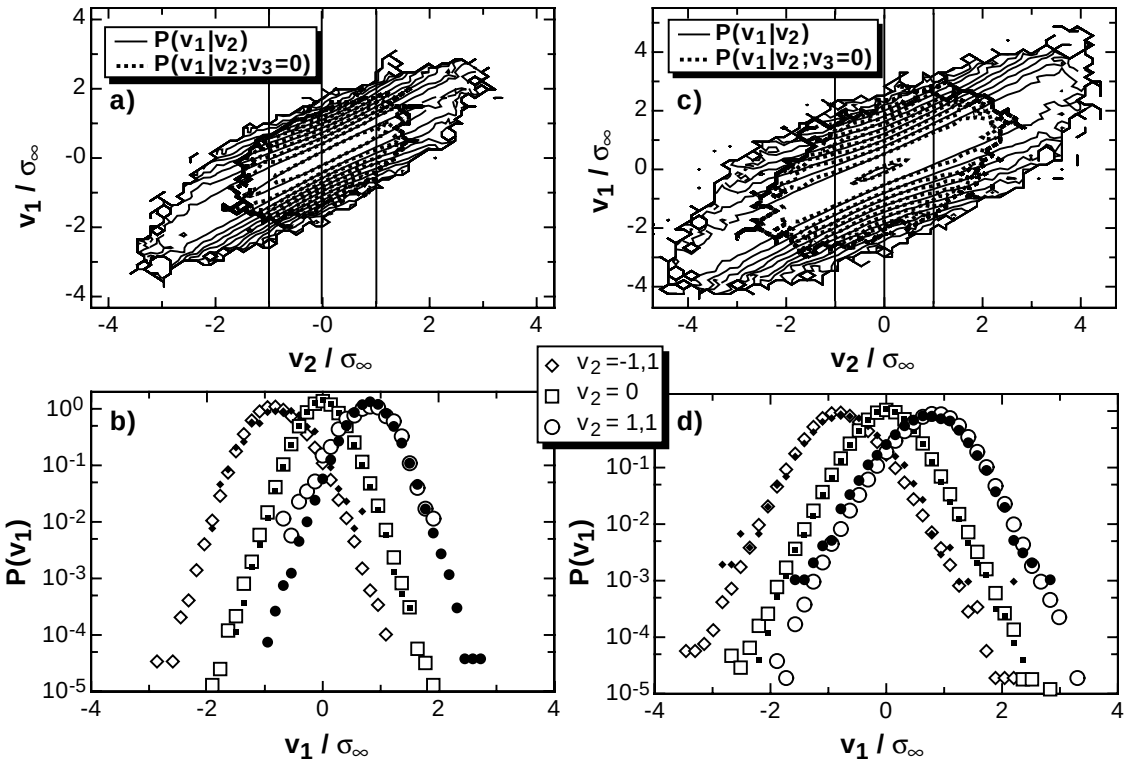


Abbildung 4.3: Test der Markov-Eigenschaft über die bedingte Wahrscheinlichkeit für die longitudinale (a+b) und die transversale Komponente (c+d) bei $r_1 = 5,8\,mm(\approx 3\lambda)$, $r_2 = 7,7\,mm(\approx 4\lambda)$ und $r_3 = 9,7\,mm(\approx 5\lambda)$. Es sind Kontur-Plots (oben) und darunter jeweils 3 charakteristische Schnitte (oben markiert) gezeigt. Offene Symbole entsprechen den einfach bedingten und geschlossene Symbole den doppelt bedingten Wahrscheinlichkeiten.

bedingten Wahrscheinlichkeiten für die gleiche Strömung wie oben (s. Abbildung 4.2) zum Vergleich bei ebenfalls gleichen Längenskalen. Die bedingten Wahrscheinlichkeiten wurden gemäß Gleichung (4.2) aus den Messdaten bestimmt.

Zu beachten ist, dass aufgrund der Dimensionalität die doppelt bedingte Wahrscheinlichkeit als Schnitt dargestellt werden muss. Es wurde dafür $v_3 = 0$ als Bedingung gewählt. Man erkennt wiederum eine hervorragende Übereinstimmung der Graphen.

[6] In der Arbeit von Johannes Zeller [76] ist dieses Verfahren anhand von Daten einer Freistrahlturbulenz diskutiert worden.

Um diese Übereinstimmung auch quantitativ zu erfassen, kann man desweiteren einen statistischen Test durchführen, der prüft inwieweit die beiden Wahrscheinlichkeiten auf der linken und rechten Seite von Gleichung (4.31) (für $n = 3$) im statistischen Sinne gleich sind. Ein solcher Test auf Gleichheit von zwei Wahrscheinlichkeitsverteilungen ist der *Wilcoxon-Test*, der zuerst von Ch. Renner [54] auf Freistrahldaten angewandt wurde und im folgenden kurz beschrieben werden soll.

Der Wilcoxon-Test der bedingten Wahrscheinlichkeiten

Ziel ist es also, die beiden Verteilungen $p(v_1, r_1|v_2, r_2)$ und $p(v_1, r_1|v_2, r_2; v_3, r_3)$ auf Gleichheit zu testen. Den Verteilungen liegen angenommene Werte des statistischen Prozesses (Realisierungen) zugrunde. Der erste Schritt des Wilcoxon-Verfahrens besteht darin, die unabhängigen Realisierungen beider Prozesse in einer Kette in aufsteigender Reihenfolge anzuordnen. Dann bestimmt man für jede Realisierung der einen Verteilung in der Kette die Anzahl der Werte der anderen Verteilung, die kleiner sind. Diese Anzahl wird *Inversion* genannt und sei hier für die i-te Realisierung mit q_i bezeichnet. Die Gesamtzahl der Inversionen Q erhält man durch Summation all dieser so bestimmten Inversionen q_i. Für zwei gleiche Verteilungen ist der Erwartungswert der Gesamtinversionen Q_{eq} durch

$$\langle Q_{eq} \rangle = \frac{mn}{2}$$

gegeben, wobei m und n die Zahl der Realisierungen der jeweiligen Verteilung angibt[7]. Für die zu untersuchenden Verteilungen wird nun die Abweichung ΔQ von diesem Erwartungswert betrachtet, die durch

$$\Delta Q = |Q - \langle Q_{eq} \rangle| \tag{4.32}$$

gegeben ist. Um die Zahl der Parameter von denen $\Delta Q = \Delta Q(v_2, v_3, r_1, r_2, r_3)$ abhängt zu reduzieren, werden für die Berechnung von q, ähnlich zum obigen Vorgehen bei der Chapman-Kolmogorov-Gleichung, gleiche Abstände Δr zwischen den Längenskalen gewählt. Also $\Delta r = r_2 - r_1 = r_3 - r_2$. Ebenfalls analog zum obigen Vorgehen wird der Schnitt $v_3 = 0$ verwendet. Damit ist $\Delta Q = \Delta Q(v_2, r_1, \Delta r)$.

Für die Entscheidung, bei welcher Abweichung ΔQ die angenommene Gleichheit der Verteilungen verworfen werden muss, muss ein sogenanntes Signifikanzniveau α vorgegeben werden. Für ein gewähltes Signifikanzniveau α (beispielsweise $\alpha = 5\,\%$) kann dann eine Abweichung ΔQ_α vom Erwartungswert $\langle Q_{eq} \rangle$ ermittelt werden (s. [16]). Ist nun ΔQ größer als ΔQ_α, so

[7] Zur Herleitung dieses Zusammenhangs siehe [16]

muss mit einer Wahrscheinlichkeit von $100\,\% - \alpha$ die These der Gleichheit der Verteilungen verworfen werden.

Für eine Basislänge r_1 und eine Längendifferenz Δr zu r_2 und r_3 ist die Abweichung ΔQ eine Funktion von v_2, also $\Delta Q = \Delta Q(v_2)$ (s.o.). Es kann nun der Anteil bestimmt werden, für die $\Delta Q(v_2) > \Delta Q_\alpha(v_2)$. Abbildung 4.4 zeigt den so berechneten Anteil für die drei Signifikanzniveaus $\alpha = 1\,\%$, $\alpha = 5\,\%$ und $\alpha = 50\,\%$ unter Variation der Längendifferenz Δr.

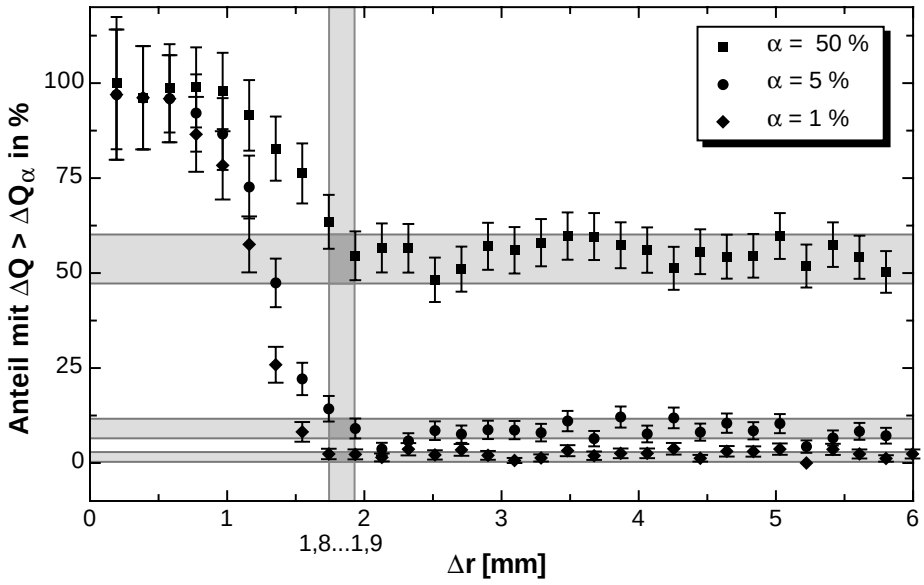


Abbildung 4.4: Verifikation von Gleichung (4.31) für $n = 3$ mittels des Wilcoxon-Tests für die Gitterströmung der vorigen Abbildungen bei gleicher Basislängenskala $r_1 = 5,8\,mm (\approx 3\lambda)$. Dargestellt ist der Anteil der über der Schwelle z_α ($\alpha = 1\,\%$, $5\,\%$ und $\alpha = 50\,\%$) liegenden Abweichungen q in Abhängigkeit von der Längendifferenz Δr.

Man erkennt in Abbildung 4.4 für $\Delta r < 1,8\,mm$ einen hohen Anteil der Ereignisse, die über dem Schwellwert ΔQ_α liegen. Für diesen Bereich muss die These der Gültigkeit von (4.31) verworfen werden. Es liegt hier mit hoher Wahrscheinlichkeit kein Markov-Prozess vor. Nach einem Abfall stabilisiert sich dieser Anteil dann auf einen im Rahmen der statistischen Schwankungen konstanten (vom Signifikanzniveau abhängigen) Level, der keinen Widerspruch mehr zur These darstellt. einer gewissen Längenskala (in Abbildung 4.4 markiert) die Gültigkeit von Gleichung (4.31) und damit die Markov-Eigenschaft bestätigt werden. Diese Mindestlängenskala für die Beschreibung der turbulenten Kaskade durch einen Markov-Prozess wird auch *Markov-Kohärenzlänge* genannt.

Ein wenig unschön ist bei diesem Verfahren noch die Abhängigkeit vom Signifikanzniveau α. Um dieses zu umgehen, kann man den Erwartungswert

der Abweichung ΔQ bestimmen. Bei Gültigkeit der Hypothese, also von Gleichung (4.31), ist die Gesamtzahl der Inversionen Q normalverteilt [16]. Damit ist der Erwartungswert von $\Delta Q = |Q - \langle Q_{eq} \rangle|$ bei Gleichheit der zu testenden Verteilungen

$$\langle \Delta Q_{eq} \rangle = \sigma_{eq} \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \tag{4.33}$$

wobei σ_{eq} die Standardabweichung von Q bezeichnet, die näherungsweise durch $\sigma_{eq} = \sqrt{nm(n+m+1)/12}$ gegeben ist. Für die durch $\langle \Delta Q_{eq} \rangle$ geteilte Abweichung

$$\Delta Q^* = \frac{\Delta Q}{\langle \Delta Q_{eq} \rangle} = \frac{|Q - \langle Q_{eq} \rangle|}{\sigma_{eq} \sqrt{\frac{2}{\pi}}} \tag{4.34}$$

ergibt sich damit der Wert 1 bei 100%iger Übereinstimmung der zu überprüfenden Verteilungen. Je weiter ΔQ^* von 1 abweicht, desto eher ist die Gleichheit der Verteilungen verletzt. Abbildung 4.5 zeigt den Erwartungswert dieser charakteristische Größe ΔQ^* für die hier betrachtete Messreihe der Gitterströmung.

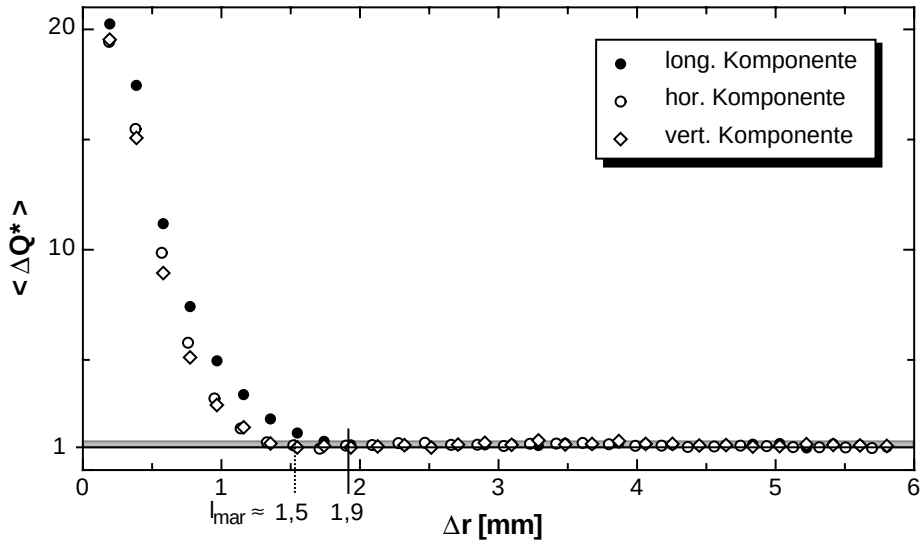


Abbildung 4.5: Wilcoxon-Test für die longitudinale (volle Symbole) und die transversalen Komponenten (offene Symbole) bei der Gitterströmung. Die Basislänge ist wiederum $r_1 = 5,8\,mm (\approx 3\lambda)$. Die Markovlänge wurde zu $l_{l,mar} \approx 1,9\,mm \approx 0,8\lambda_l$ für die longitudinale, sowie zu $l_{t,mar} \approx 1,6\,mm \approx 0,9\lambda_t$ für die transversalen Komponenten bestimmt.

Bei kleinen Längendifferenzen Δr ist der Erwartungswert $\langle \Delta Q^* \rangle$ noch sehr weit vom Idealwert 1 entfernt, fällt dann aber auf einen im Rahmen der statistischen Unsicherheit (grauer Bereich) konstanten Wert, der sehr dicht an diesem

Idealwert liegt, ab. Für alle Komponenten des Geschwindigkeitsvektors zeigt sich ein ähnliches Verhalten, wobei der Abfall für die beiden transversalen Komponenten bei etwas kleineren Δr erfolgt. Das Verhalten ist analog zum vorher beschriebenen Vorgehen über die Bestimmung des Anteils, bei der die Abweichung ΔQ über einer Schranke ΔQ_α liegt und zeigt damit die Konsistenz dieser Verfahren (vgl. Abb. 4.4).

Die Markov-Kohärenzlänge l_{mar} wird bei der 2. Methode über $\langle \Delta Q^* \rangle$ durch den ersten Wert, der innerhalb der statistischen Schwankungen auf dem erreichten konstanten Niveau liegt, gegeben und kann durch die kleineren Schwankungen etwas genauer bestimmt werden. Daher soll im weiteren Verlauf dieser Arbeit diese 2. Variante des Wilcoxon-Tests über die Berechnung des Erwartungswertes $\langle \Delta Q^* \rangle$ der normierten Abweichung ΔQ^* vom Idealfall der 100%igen Gleichheit der Verteilungen verwendet werden.

Bemerkungen zu den Test-Methoden

Es sei noch kurz angemerkt, dass ein vollständiger Beweis der Markov-Eigenschaft allerdings erst erbracht ist, wenn diese Bestätigung für alle v_3 sowie für alle n durchgeführt wird, was in der Praxis aufgrund des immensen Aufwandes nicht durchführbar ist. Damit können also auch über die direkte Definition der Markov-Eigenschaften, die ja durch den Wilcoxon-Test überprüft wird, zwar ebenfalls starke Indizien aber kein absoluter Beweis der Markov-Eigenschaften erbracht werden. In der Praxis werden daher im folgenden für die untersuchten Strömungen das Verfahren über die Chapman-Kolmogorov-Gleichung und der Wilcoxon-Test verwendet, um die Sicherheit der Aussage über die Markov-Eigenschaft zu erhöhen.

Zusammenfassung der Markov-Eigenschaften bei der Gitterströmung

In diesem Abschnitt wurde das Vorgehen bei der Untersuchung der Gültigkeit der Markov-Eigenschaften der Messdaten anhand des Beispiels der Nachlaufströmung eines Gitters beschrieben. Die dabei gewonnenen Erkenntnisse seien sie hier noch einmal zusammengefasst:

Durch beide Varianten des Wilcoxon-Tests ist für die untersuchte Gitterströmung gezeigt, dass die Gleichung der Markov-Eigenschaft (4.31) für $n = 3$ ab der Längenskala $l_{l,mar} = 1,74\,mm \approx 0,8\lambda_l$ für die longitudinale und $l_{t,mar} = 1,34\,mm \approx 0,9\lambda_t$ für die transversale Geschwindigkeitskomponente bestätigt ist. Für kleinere Längenskalen als l_{mar} kann kein Markov-Prozess angenommen werden. Physikalisch ist dieses auf den Einfluss der Viskosität zurück zu führen, der bei Längenskalen unterhalb der Taylor-Länge zunimmt.

Die Viskosität bewirkt eine Glättung der Fluktuationen bei diesen kleinen Längenskalen. Die Glättung hat eine Art Gedächtnis bzw. Kohärenz (*Memory-Effekt*) innerhalb des Prozesses zur Folge. Damit brechen dort die Markov-Eigenschaften zusammen. Die Größe l_{mar} kennzeichnet also die Längenskala, unterhalb der diese Kohärenz die Markov-Eigenschaft zerstört. Daher wird l_{mar} als *Kohärenzlänge des Markov-Prozesses* bezeichnet.

Recht interessant und bislang ungeklärt ist die Frage, in welchem Bezug die Markov-Kohärenzlänge l_{mar} zu den Mikro-Längenmaßen der Turbulenz (siehe Kapitel 3), der Taylor-Länge λ und der Kolmogorov-Länge η, ab der der Einfluss der Dissipation signifikant wird, steht.

In Kapitel 3 wurde eine Messreihe mit einer Eindrahtsonde in der Gitterströmung vorgestellt, bei der die mittlere Geschwindigkeit und damit die Reynoldszahl der Strömung variiert wurde. Für diese Messreihe wurden mittels des Wilcoxon-Tests (2. Methode) die Markov-Kohärenzlängen bestimmt. Ebenfalls wurde in Kapitel 3 dargestellt, wie sich die Taylor-Länge λ und die Kolmogorov-Länge η mit der Strömungsgeschwindigkeit ändern (Abbildung 3.10). Damit kann also überprüft werden, wie die Markov-Kohärenzlänge sich zu diesen Größen verhält.

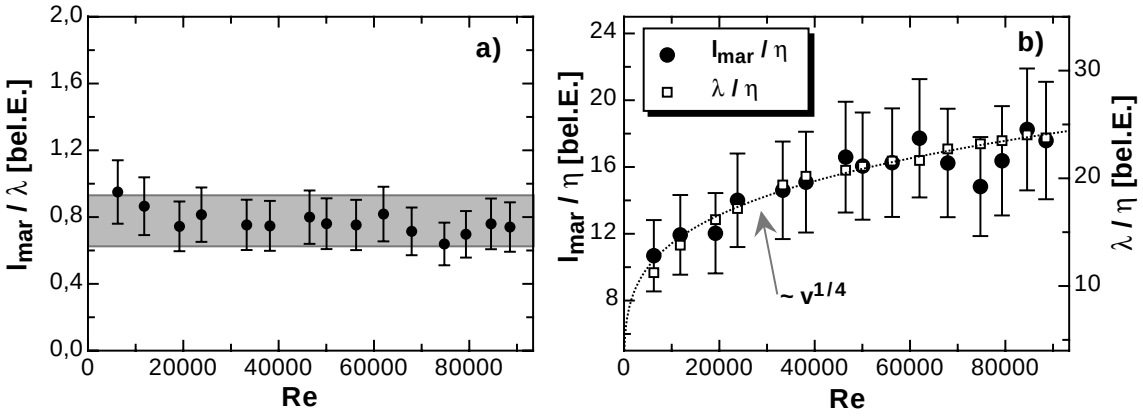


Abbildung 4.6: Das Verhältnis der Markov-Kohärenzlänge l_{mar} zur Taylor-Länge λ (a), sowie zur Kolmogorov-Länge η (b).

Abbildung 4.6 zeigt in a) das Verhältnis l_{mar}/λ von Markov-Kohärenzlänge zur Taylor-Länge in Abhängigkeit von der Reynoldszahl. Die Werte des Quotienten sind im Rahmen der Genauigkeit, mit der die Größen bestimmt werden konnten (grauer Bereich), konstant und es ergibt sich damit $l_{mar} \approx 0,8\lambda$. Übrigens ist dies dasselbe Ergebnis, wie zuvor bei der longitudinalen Komponente der anderen Gittermessung. In Kapitel 3 wurde dargestellt, dass folgende Abhängigkeit von λ und η von der Reynoldszahl bestehen

$$\lambda \sim Re^{-1/2} \quad \text{bzw.} \quad \eta \sim Re^{-3/4}. \tag{4.35}$$

Damit darf der Quotient von Markov-Kohärenzlänge l_{mar} und Kolmogorov-Länge η nicht konstant sein, sondern muss wie λ/η proportional zu $v^{1/4}$ verlaufen. Abbildung 4.6 b) bestätigt dies sehr gut. Somit ist in recht eindeutiger Weise trotz der angesprochenen Unsicherheiten bei der Bestimmung der Markov-Kohärenzlängen gezeigt, dass für eine isotrope Gitterströmung die Markov-Kohärenzlänge über einen weiten Reynoldszahlenbereich (von$\sim$6000 bis $\sim$90000) nahezu der Taylor-Länge entspricht.

4.4.2 Bestimmung der Kramers-Moyal-Koeffizienten

Nach der Überprüfung der Markov-Eigenschaften einer Datenreihe gilt es nun, zur Beschreibung des stochastischen Prozesses gemäß der Kramers-Moyal-Entwicklung (4.12) die dort enthaltenen Koeffizienten zu bestimmen.

Die Kramers-Moyal-Koeffizienten sind durch

$$D_k(v,r) = \lim_{\Delta r \to 0} M_k(v,r,\Delta r)\ , \text{mit} \tag{4.36}$$

$$M_k(v,r,\Delta r) = \frac{r}{k!\,\Delta r} \int_{-\infty}^{+\infty} (\tilde{v}-v)^k\ p\left(\tilde{v}, r-\Delta r|v,r\right)\ d\tilde{v} \tag{4.37}$$

definiert (siehe Abschnitt 4.3.2). Die Vorkoeffizienten M_k, aus denen dann durch (4.36) die eigentlichen Koeffizienten D_k ermittelt werden, sind direkt aus den Daten bestimmbar. Sie hängen noch von Δr ab. Für die longitudinale

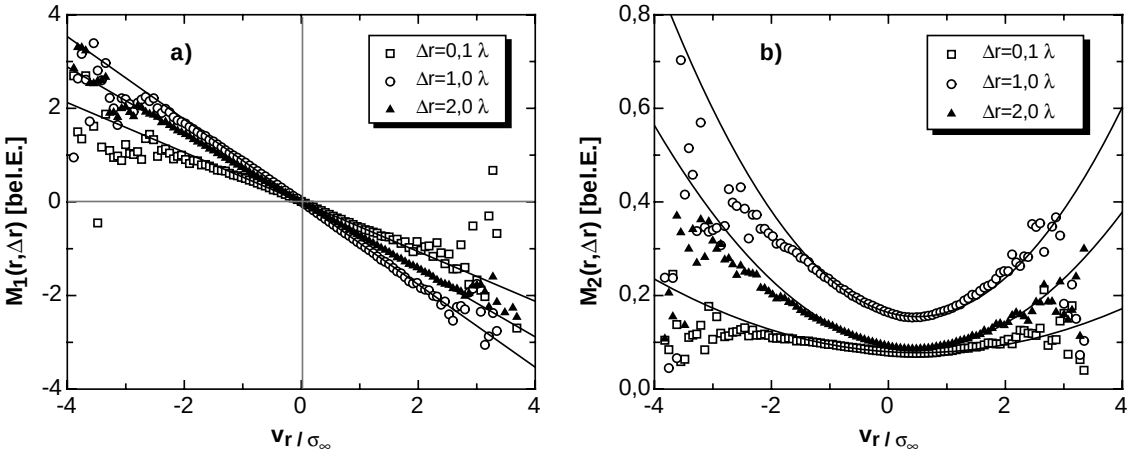


Abbildung 4.7: Darstellung von M_1 in a) und M_2 in b) der Longitudinalkomponente der Gitterströmung für verschiedene Δr bei einer Basislänge $r_1 = 7,7\,mm \approx 4\lambda$. Zusätzlich zu den direkt aus den Daten bestimmten Werten von M_1 bzw. M_2 sind noch Approximationen von Ursprungsgeraden bzw. Parabeln eingezeichnet.

Komponente der besprochenen Gitterströmung ist der Verlauf von M_1 und M_2 in Abbildung 4.7 exemplarisch für einige Δr gezeigt.

Aus Gleichung (4.36) geht hervor, dass die Koeffizienten D_k aus einem Grenzübergang von $\Delta r \to 0$ zu bestimmen sind. Ein Grenzübergang ist ein mathematisches Konzept, stellt also eine Idealisierung dar und ist für experimentelle Daten generell problematisch. Ein zusätzliches Problem bei der Markov-Analyse der turbulenten Kaskade ist hierbei, dass für eine turbulente Datenreihe bei Δr kleiner einer Markov-Kohärenzlänge l_{mar} die Markov-Eigenschaft nicht mehr erfüllt ist.

Die Koeffizienten M_1 können beispielsweise, wie aus Abbildung 4.7 hervorgeht, für alle Δr sehr gut durch eine Ursprungsgerade $M_1(v_r) = a_1 v_r$ approximiert werden, wobei der Parameter a_1 von Δr abhängt. Der Verlauf des Parameters a_1 unter Variation von Δr ist aus Abbildung 4.8 in Teil a) ersichtlich.

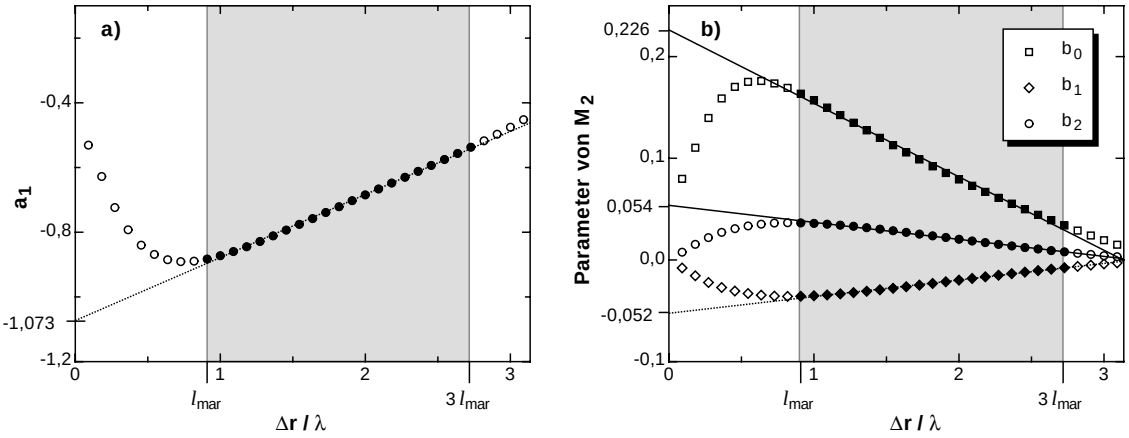


Abbildung 4.8: Darstellung der Parameter a_1 von $M_1 = a_1 v_r$ (Teil a), sowie $b_0,\ b1,\ b_2$ von $M_2 = b_0 + b_1 v_r + b_2 v_r^2$ (Teil b) in Abhängigkeit von Δr. Der graue Bereich und die gefüllten Symbole markieren den zur Anpassung der Geraden und Extrapolation herangezogenen Werte im Bereich zwischen l_{mar} und $3l_{mar}$.

Man erkennt bei kleinem Δr unterhalb von l_{mar} eine deutliche Abweichung vom weiteren Verlauf, die bei der Durchführung des Grenzübergangs zu falschen Resultaten führen würde, weil der Gültigkeitsbereich der Markov-Eigenschaft verletzt wird. Dies ist eine sehr schöne Bestätigung der Markov-Kohärenzlänge und könnte sogar zu deren Bestimmung verwendet werden. Für $\Delta r > l_{mar}$ ist ein in guter Näherung linearer Verlauf zu beobachten. Dies legt nahe, den Grenzübergang über eine lineare Extrapolation durchzuführen. Dafür wurden die Werten von a_1 im Bereich zwischen l_{mar} und $3l_{mar}$ verwendet und man erhält $a_1(0) \approx -1,07$.

Ebenso kann die Extrapolation der angepassten Parametern auch für die

Parabelnäherung $M_2 = b_0 + b_1 v_r + b_2 v_r^2$ (s. Abbildung 4.7 b) durchgeführt werden. Abbildung 4.8 b) zeigt, dass die Parameter b_0, b_1, b_2 in gleicher Weise extrapoliert werden können. Die resultierende Parabel mit den Parametern $b_0 = 0,226$, $b_1 = -0,052$ und $b_2 = 0,054$ ist ein wenig später in Abbildung 4.10 gezeigt (gestrichelte Linie dort). Dieses Verfahren wurde in [55] bei Messungen an einem Freistrahlexperiment durchgeführt. Es zeigte sich dort ein ähnlicher Verlauf der Kramers-Moyal-Koeffizienten D_1 und D_2.

Die Approximation der bedingten Momente M_2 durch Parabeln erfasst, wie aus Abbildung 4.7 b) hervorgeht, die leichte Asymmetrie von M_2 nicht. Damit wäre diese Asymmetrie in D_2, das aus der Extrapolation der Parameter der Parabeln hervorgeht, ebenfalls nicht berücksichtigt. Um nicht für alle Fälle neue Parameter einführen zu müssen kann man versuchen die M_k direkt, das heißt ohne vorherige Anpassung an eine Kurve, zu extrapolieren. Das Vorgehen sei im folgenden wieder anhand der oben berechneten und in Abbildung 4.7 exemplarisch dargestellten M_1 und M_2 geschildert.

Die Werte von $M_1(v_r, r, \Delta r)$ bzw. $M_2(v_r, r, \Delta r)$ zeigen für feste v_r und r in Abhängigkeit von Δr einen ähnlichen Verlauf wie zuvor die Parameter $a_1(\Delta r)$ bzw. $b_i(\Delta r)$. Dies ist exemplarisch für 4 Werte von v_r in Abbildung 4.9 dargestellt.

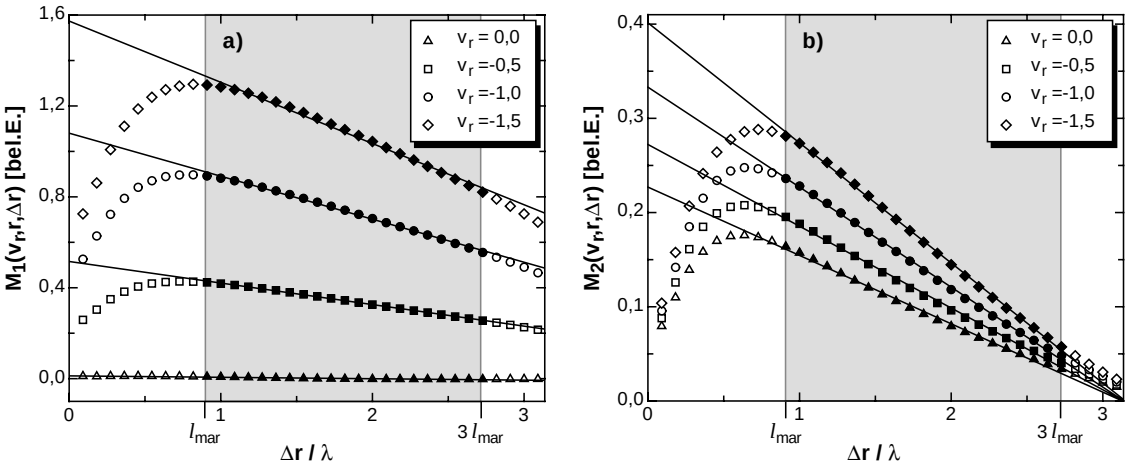


Abbildung 4.9: Exemplarische Darstellung der direkten Extrapolation von M_1 in a) und M_2 in b) für jeweils 4 ausgewählte Geschwindigkeitsinkremente v_r (bezogen auf σ_∞). Der graue Bereich und die gefüllten Symbole markieren wiederum die zur Anpassung der Geraden und Extrapolation herangezogenen Werte im Bereich zwischen l_{mar} und $3l_{mar}$.

Im Bereich von l_{mar} bis $3l_{mar}$ kann wiederum in sehr guter Näherung eine Gerade angepasst werden, die dann zu $\Delta r = 0$ extrapoliert werden kann[8]. Die

[8] Erfreulich und ein Zeichen der inneren Konsistenz der Analyse ist das wiederum exakt

lineare Extrapolation kann nun für jeden Wert von v_r durchgeführt werden und man erhält so den Grenzübergang zu $D_1(v_r, r)$ bzw. $D_2(v_r, r)$. Abbildung 4.10 zeigt die so gewonnenen Kramers-Moyal-Koeffizient D_1 in a) und D_2 in b).

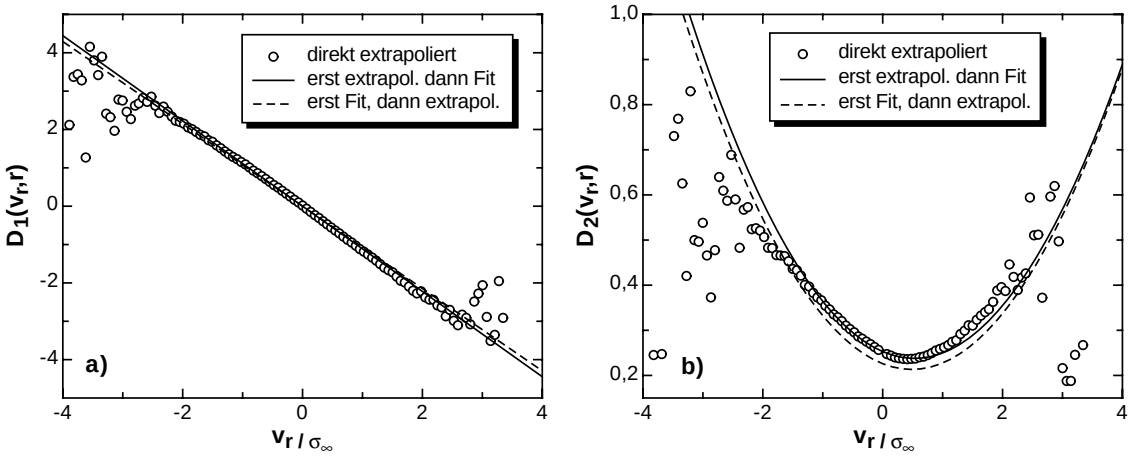


Abbildung 4.10: Gezeigt werden die aus der direkten Extrapolation ermittelten Kramers-Moyal-Koeffizienten $D_1(v_r, r)$ (in a) und $D_2(v_r, r)$ (in b). Für D_1 ergibt sich eine Ursprungsgerade und für D_2 kann in 1. Näherung eine Parabel angenommen werden. Zusätzlich sind zum Vergleich die sich aus der Methode der extrapolierten Parameter ergebenden Kurven eingezeichnet (gestrichelte Linien).

Um einen Vergleich mit der vorigen Methode, die ja 'nur' die angepassten Parameter extrapoliert hatte, zu erhalten, wurden an D_1 eine Ursprungsgerade angepasst und zusammen mit einer Geraden der zuvor ermittelten Steigung $a_1(0)$ in das Diagramm 4.10, Teil a), eingezeichnet (gestrichelte Linie). Die Steigung dieser nach der Extrapolation angepassten Geraden beträgt $-1,08$ und ist damit in guter Übereinstimmung zu den zuvor ermittelten Wert $a_1(0) = -1,07$. Trotz des oben angesprochenen Fehlers durch die Asymmetrie von D_2 wurde zum Vergleich zur Methode der Extrapolation der Parameter der Parabeln der M_2 an die direkt extrapolierten Werte D_2 eine Parabel angepasst. Abbildung 4.10 zeigt für D_2 eine etwas größere Abweichung der beiden Methoden als bei D_1. Hauptsächlich wurde für den Offset b_0 der Parabel bei der ersten Methode ein geringerer Wert ermittelt.

Aufgrund des Vorteils keine Annahmen bezüglich der Form der Vorkoeffizienten M_k machen zu müssen, wird im weiteren die Methode der direkten Extrapolation vorgezogen. Gerade im Hinblick auf die nicht isotropen Strömungen verspricht dies eine wesentliche Verbesserung, da nicht jedes mal eine Parametrisierung der M_k gefunden werden muss. Auch ist dadurch eher

bei l_{mar} abknickende Verhalten der Werte.

eine Automatisierung durchführbar, die bei der Untersuchung der umfangreichen Messreihen nötig wird. Natürlich muss dabei immer die Anwendbarkeit der linearen Extrapolation im entsprechenden Bereich von l_{mar} bis $2l_{mar}$ oder $3l_{mar}$ gemäß Abbildung 4.9 überprüft werden.

4.4.3 Weitere Ergebnisse der Markov-Analyse der isotropen Gitterströmung und der Zylinderströmung im Fernfeld

Nachdem soeben beschrieben wurde, wie per Extrapolation aus den Vorkoeffizienten M_k die Kramers-Moyal-Koeffizienten betimmt werden können, werden diese nun weiter untersucht. Abbildung 4.11 zeigt zum Vergleich die ersten zwei Kramers-Moyal-Koeffizienten für alle Komponenten des Geschwindigkeitsvektors der Gitterströmung. Da bei den hier vorgenommenen X-Draht Messungen jeweils nur zwei Komponenten simultan erfasst werden können, sind zwei Messungen mit gedrehter Sonde nötig (s. Kapitel 3). Dadurch ergeben sich für die longitudinale Komponente zwei Messreihen, die statistisch die selben Ergebnisse bringen sollten. In Abbildung 4.11, sowie auch in der folgenden Abbildung 4.12 ist diese Komponente daher zweifach vertreten.

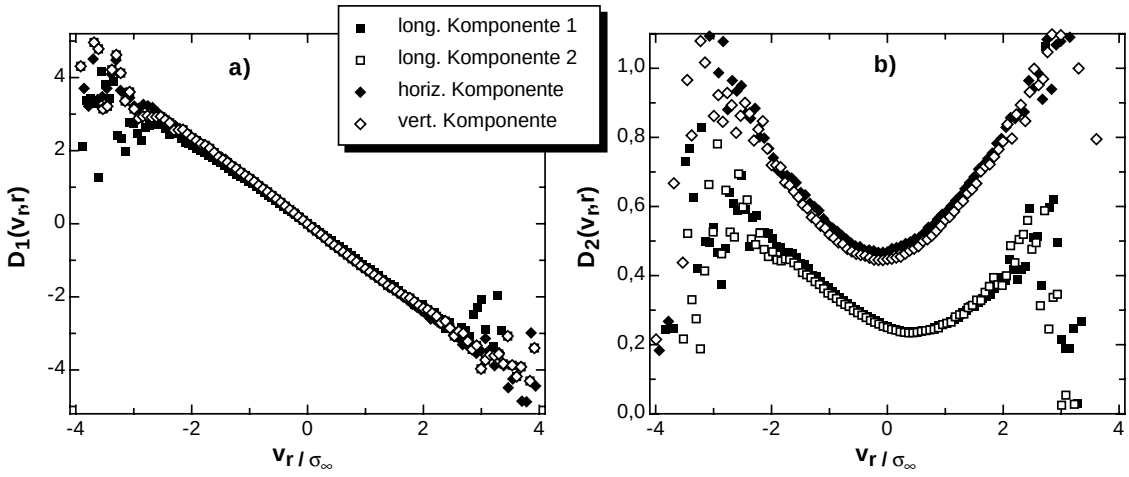


Abbildung 4.11: Die ersten zwei Kramers-Moyal-Koeffizienten für alle Komponenten des Geschwindigkeitsvektors der Gitterströmung (D_1 in a) und D_2 in b).

Für D_1 ergibt sich für alle Komponenten ein linearer Verlauf mit der gleichen Steigung. Diese wurde im vorigen Abschnitt zu $a_1(0) \approx -1,07$ bestimmt. In D_2 (siehe Teil b) sind die transversalen Komponenten (horizontal und vertikal) annähernd gleich, jedoch verschieden von der longitudinalen Komponente. D_2

verläuft für diese transversalen Komponenten oberhalb der Werte der Longitudinalkomponente, was einen höheren Grundlevel des stochastischen Anteils bedeutet. Dieses Verhalten lässt sich mit den Ergebnissen aus der Castaing-Analyse (siehe 2.4.3 und Abb. 3.16) folgendermaßen in Verbindung bringen:

Ein stärker intermittentes Verhalten der Verteilungen hat einen größeren Wert für den Formparameter $\tilde{\lambda}$ aus der Castaing-Analyse zur Folge. Im stochastischen Prozess, beschrieben durch D_1 und D_2, ist die Intermittenz durch den parabolischen Verlauf von D_2 verursacht (s. Abschnitt 4.3.4). Der parabolische Anteil von D_2, erkennbar durch die Krümmung in Abbildung 4.11 b), ist bei der longitudinalen Komponente kleiner als bei den transversalen Komponenten. Der stochastische Anteil ist also dafür verantwortlich, dass der bei der Castaing-Analyse bestimmte Formparameter $\tilde{\lambda}$ für die longitudinale Komponente kleiner ist, als bei den transversalen Komponenten (vgl. Abb. 3.16).

Daneben fällt die Symmetrie von D_2 um $v_r = 0$ auf, die schon in den Inkrement-Verteilungen beobachtet wurde (siehe Abb. 3.15). Da im deterministischen Teil (D_1) dieser Unterschied nicht auftritt, ist damit gezeigt, dass die Asymmetrie der Inkrement-Verteilungen alleine durch den stochastischen Anteil verursacht wird.

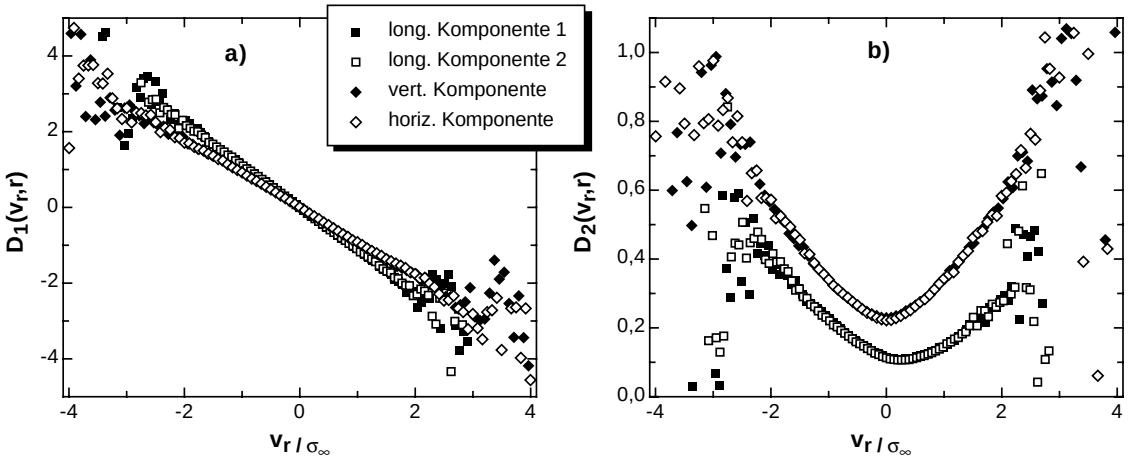


Abbildung 4.12: Die Kramers-Moyal-Koeffizienten D_1 und D_2 für alle Komponenten des Geschwindigkeitsvektors einer Zylinderströmung ($X = 100\,D$ mit $D = 2\,cm$).

Zum Vergleich sind in Abbildung 4.12 die ersten zwei Kramers-Moyal-Koeffizienten für eine Zylinderströmung dargestellt. Der Zylinderdurchmesser D betrug $2\,cm$ und der Abstand des Messsensors war $100\,D$.[9]

[9] Es handelt sich um die selbe Messung, die den Abbildungen 3.22 und 3.23 zugrunde liegen.

Hier ergibt sich für die transversalen Komponenten eine etwas geringere Steigung von D_1 als bei der longitudinalen Komponenten ($-0,85$ gegenüber $-1,07$). Die unterschiedliche Steigung von D_1 bedeutet eine unterschiedliche Kontraktion der Inkrement-Verteilungen bezüglich v_r, was jedoch durch die Normierung in Abbildung 3.22 nicht zu erkennen ist.

D_2 (Teil b) der Abbildung) hat qualitativ das gleiche Verhalten wie bei der Gitterströmung beobachtet. Für die transversalen Komponenten liegt D_2 oberhalb von D_2 der longitudinalen Komponente und zeigt ebenfalls die Symmetrie um $v_r = 0$. Der Bezug zu den Inkrement-Verteilungen wurde bereits diskutiert.

Kapitel 5

Übergang der Karman-Straße in die vollentwickelte Turbulenz

In diesem Kapitel werden einige Eigenschaften der Entwicklung der Turbulenz hinter einem Zylinder beschrieben. Es wird gezeigt, wo die klassischen Auswerteverfahren in der nicht voll entwickelten und damit anisotropen Strömung im Nahfeld des Zylinders an Grenzen stoßen. Danach wird die Markov-Analyse als einheitliche Auswerte- und Beschreibungsmethode auf die Daten des Übergangsbereiches in die vollentwickelte Turbulenz angewandt. Die ermittelten Kramers-Moyal-Koeffizienten werden analysiert und mit physikalischen Eigenschaften der sich entwickelnden Strömung in Verbindung gebracht. Mit der Längenskala und dem Abstand des Messortes hinter dem Zylinder als Parameter kann abschließend eine überblicksartige Darstellung des Auftretens der Karmanschen Wirbel als Phasenraumdiagramm gegeben werden. Ein Teil der Ergebnisse wurde bereits in [42] veröffentlicht.

5.1 Einleitung

In Kapitel 3 wurden über eine Visualisierung (Abbildung 3.17 und 3.18) erste qualitative Merkmale der Nachlaufströmung hinter einem Zylinder kurz dargestellt. Natürlich möchte man über eine rein qualitative Beschreibung hinaus gehen. Die Schwierigkeit besteht darin, dass viele der verwendeten Auswertemethoden (z.B. Momentenanalyse) nur für den Spezialfall der vollentwickelten Turbulenz gelten und zudem noch die Einschränkung der Homogenität und Isotropie besitzen. Eine Verallgemeinerung bzw. Ausweitung des Gültigkeitsbereiches wird derzeit versucht, ist jedoch noch nicht weit fortgeschritten. Zudem ist es äußerst fraglich, ob dieses überhaupt zum Erfolg führen kann, da selbst in der idealisierten Strömung noch recht grundlegende Probleme bestehen (s. Kapitel 3).

Daher wurde für die statistische Untersuchung der Entwicklung der Karmanschen Wirbelstraße das im vorigen Kapitel vorgestellte Verfahren der Mar-

kov-Analyse verwendet. Wie dort schon erwähnt befindet sich die praktische Durchführung der Markov-Analyse noch in der Entwicklungsphase. Aufgrund dieser Tatsache sind die Ergebnisse dieses Kapitels aus zwei Gesichtspunkten zu betrachten. Der erste Aspekt betrifft die Durchführung und Anwendbarkeit des Auswerteverfahrens, der zweite die physikalischen Erkenntnisse, die mit Hilfe dieses Verfahrens gewonnen werden konnten.

Zuvor seien hier kurz einige Ergebnisse einer Analyse der Messdaten im Zentrum der Karman-Straße vorgestellt, die mit den in Kapitel 2 vorgestellten und in der Turbulenzforschung weit verbreiteten Auswertemethoden gewonnen wurden.

5.2 Verwendete Messdaten

Die diesem Kapitel zugrunde liegenden Messungen wurden mit den in Kapitel 3 beschriebenen Verfahren der Hitzdraht-Anemometrie durchgeführt. Um die Charakteristik der Karmanschen Wirbelstraße möglichst gut zu erfassen, wurden X-Draht-Sensoren verwendet, mit denen die Geschwindigkeitskomponente in Strömungsrichtung, sowie eine dazu senkrechte Komponente simultan gemessen werden können. Durch Drehung des Sensors wurde dann, wie bei der Gitter-Messung (Kapitel 3) beschrieben, mit einer zweiten Messung die dritte Geschwindigkeitskomponente erfasst.

Da das Hauptinteresse in der Beschreibung des *Übergangs* der Karmanschen Wirbelstraße in die vollentwickelte Turbulenz lag, wurden Messungen in verschiedenen Abständen des Sensors vom Zylinder durchgeführt. Dabei wurden jeweils mehrere dieser Messreihen mit unterschiedlichen Zylindern (Durchmesser 2 cm und 5 cm), Sensoren und Windgeschwindigkeiten aufgenommen. Der große Zylinder wurde verwendet, um die Strukturen direkt hinter dem Zylinder gut erfassen zu können, während die Verwendung des kleinen Zylinders notwendig wurde, um innerhalb der zur Verfügung stehenden Messstrecke den Übergang in die vollentwickelte Turbulenz messen zu können

Für eine statistische Auswertung müssen ausreichend viele Messdaten aufgenommen werden, um statistische Fehler zu minimieren. Die Datensätze der Einzelmessung bestehen aus jeweils 100 Blöcken mit je 125000 Werten. Das ergibt pro Messung ein Datenvolumen von etwa 50 Megabyte. Eine tabellarische Auflistung der verwendeten Messungen finden sich aufgrund ihres Umfangs im Anhang. Zusätzlich zu Strömungsbedingungen und messtechnischen Einzelheiten, sind dort zur Orientierung überblicksartig die wichtigsten Kenngrößen der Turbulenz mit angegeben. Die wichtigsten Daten der diesem Kapitel verwendeten Messreihen 'ZYLAB01V..06V' bzw. 'AusX10..19' finden sich in der Tabelle 2 (Abbildung 6.2) im Anhang.

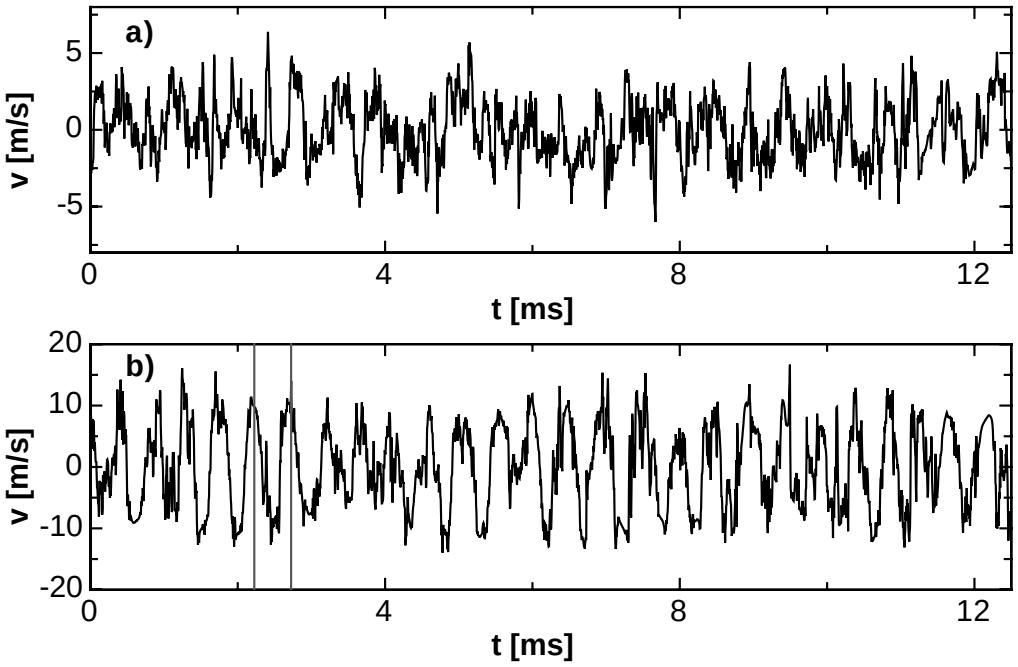


Abbildung 5.1: Ausschnitt der Vertikalkomponente der Geschwindigkeit in $40\,D$ (a) und $8\,D$ (b) Entfernung des Sensors zum Zylinder (D: Zylinderdurchmesser $D = 5\,cm$). In Teil b) ist ein Bereich der typischen Wirbelgröße markiert.

Exemplarisch sind in Abbildung 5.1 auszugsweise zwei Zeitreihen der Vertikalkomponente der Geschwindigkeit gezeigt. Man erkennt deutlich das (unregelmäßige) Auftreten von gröberen Strukturen (Markierung) in der Nähe des Zylinders (Teil b). Diese sind auf die sich turbulent ablösenden Karmanschen Wirbel zurück zu führen. Auch wenn diese nicht periodisch sind, so ist doch im Leistungsspektrum ein Maximum bei Frequenzen zu erwarten, die in der Größenordnung dieser Strukturen liegen.

Abbildung 5.2 zeigt einige ausgewählte Spektren der Zylinder-Nachlaufströmung für verschiedene Abstände. Nur in der Vertikalkomponente ist das auf die Karmanwirbel zurückzuführende Maximum erkennbar. Die Frequenz liegt bei $121\,Hz$, was über die mittlere Geschwindigkeit (Taylorhypothese) umgerechnet einer Länge von $19,5\,cm$ entspricht. Die longitudinale Komponente zeigt in allen Abständen ein klassisches Kolmogorov-Spektrum. Das ist darauf zurück zu führen, dass die Karmanwirbel in der Zylinderebene, in der gemessen wurde, lediglich eine Vertikalkomponente besitzen. Aufgrund dieser Tatsache werden für die Untersuchung des Übergangs in die vollentwickelte Turbulenz die folgenden Auswertungen anhand der Vertikalkomponente der Geschwindigkeit durchgeführt. Ein vergleichbares Resultat wurde auch von V. Ninni et al. in [49] gefunden. Dort wurde mit einer 3-Draht-Sonde in einem Abstand von $X = 11D$ und $14D$ gemessen.

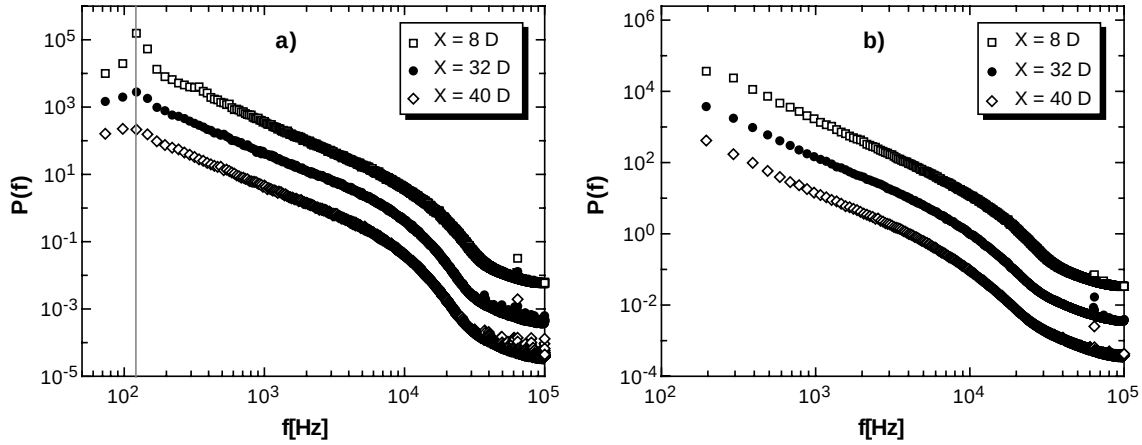


Abbildung 5.2: Leistungsspektren der Vertikalkomponente (a), sowie zum Vergleich der Logitudinalkomponente (b) der Zylinderströmung in verschiedenen Abständen.

5.3 Momentenanalyse

Trotz aller diskutierten Probleme ist die in Kapitel 2 vorgestellte Analyse der Strukturfunktionen, also der Momente der Inkremente v_r, ein gängiges Verfahren. Es wird versucht über das Skalenverhalten der Strukturfunktionen Informationen über die turbulente Kaskade zu gewinnen. 1997 hat Chasnov in [21] auf numerischem Wege eine Erweiterung der Momentenanalyse auch auf inhomogene Turbulenz vorgestellt. Ebenso wurde von L'vov und Procaccia in [44] Möglichkeiten vorgeschlagen die universellen Skalenexponenten auch in anisotropen Strömungen zu ermitteln. Diese setzen allerdings simultane Messungen mehrerer Sonden voraus und sind daher hier nicht anwendbar.

Abbildung 5.3 zeigt die Strukturfunktionen der Vertikalkomponente der Geschwindigkeit im Zylindernachlauf bis zur 6. Ordnung für die Entfernungen $40\,D$ und $8\,D$ zum Zylinder ($D = 5\,cm$). Dabei sind die ungeraden Momente über die Beträge (s. Kapitel 3) berechnet. Man erkennt den für näherungsweise isotrope Strömung bekannten (s. Kapitel 3) Verlauf der Strukturfunktionen bei der Messung in $40\,D$ Abstand. In einem Bereich, der im Inertialbereich zwischen λ und L liegt und für höhere Momente abnimmt, kann Näherungsweise ein Skalenverhalten $S^n \sim r^{\xi_n}$ beobachtet werden. Abbildung 5.3 a) zeigt dies durch die eingezeichneten Geraden mit Steigungen, die den nach Kolmogorov (Gleichung (2.41)) zu erwartenden Exponenten entsprechen. Im inhomogenen Bereich (Abb. 5.3 b) scheinen die Strukturfunktionen sogar besser zu skalieren, allerdings mit differierendem Skalenexponenten. Diese genügen allerdings nicht mehr der Kologorovschen Vorhersage, die der Übersichtlichkeit halber nur für S^4 eingezeichnet wurde. Bemerkenswert ist dies vor allem, da der Längenskalenbereich der Karmanwirbel (in der Abbildung grau markiert)

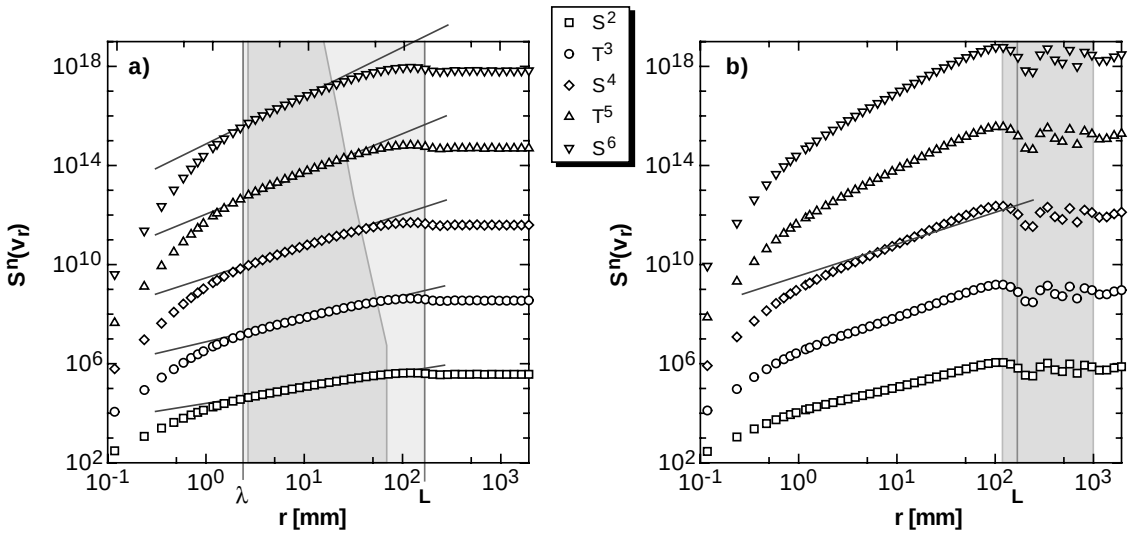


Abbildung 5.3: Strukturfunktionen bis zur 6. Ordnung der Vertikalkomponente in 40 D (a) und in 8 D (b) Entfernung hinter dem Zylinder ($D = 5$ cm). In a) ist der Inertialbereich durch λ und L, sowie der Bereich eines näherungsweisen Skalenverhaltens markiert. In b) ist der Längenskalenbereich der Karmanwirbel gekennzeichnet.

jenseits dieses Skalenbereiches liegt. Es gibt also eine Rückwirkung von den großen Längenskalen der Karman-Wirbel auf kleinere Skalen in der Kaskade. Dies zeigt, dass es nicht genügen würde, beispielsweise durch Filterung, die Längenskalenbereiche zu trennen und separat zu beschreiben.[1]

Auch wenn nicht der gesamte Prozess beschrieben wird, beinhalten die Skalenexponenten durch diese Rückwirkung doch gewisse Informationen für den inhomogenen Bereich nahe des Zylinders.

In Kapitel 3 wurde bereits der Auswertemechanismus der erweiterten Selbstähnlichkeit (ESS) beschrieben und in der isotropen Strömung angewendet. Er bietet durch den größeren Skalierungbereich eine größere Sicherheit bei der Bestimmung der Skalenexponenten. Wie in Kapitel 3 wird eine Auswertung von S^6 gegenüber T^3 durchgeführt. Abbildung 5.4 zeigt $\ln S^6$ aufgetragen gegenüber $\ln T^3$ für die oben bereits gezeigten Messorte in $40\ D$ und $8\ D$ Entfernung. Die über die in der Abbildung gefüllt dargestellten Werte angepassten Geraden, haben die Steigungen $m(40D) = 1,775$ bzw. $m(8D) = 1,765$. Der Fehler der Anpassung liegt bei $\approx \pm 10^{-2}$ und damit bei ähnlichen Größen, wie der Unterschied der Steigungen selbst.

Wie in Kapitel 3 schon erwähnt, ist eine weitere Unsicherheit bei der ESS-Analyse die Schwierigkeit den Skalierungsbereich genau festzulegen. Oben (Abbildung 5.3 b) wurde gezeigt, dass die Momentenanalyse den Längenskalenbereich der Wirbelstrukturen nicht erfasst, dass hier kein Skalenverhalten

[1] siehe entsprechenden Abschnitt in der Einleitung

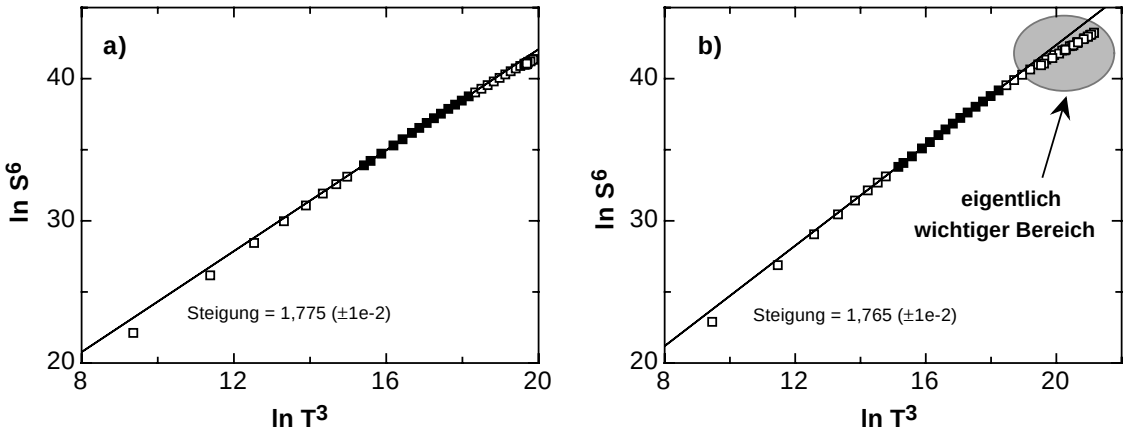


Abbildung 5.4: ESS-Auswertung der Strukturfunktionen der Vertikalkomponente in 40 D (Teil a)) und in 8 D (Teil b)) Entfernung hinter dem Zylinder ($D = 5$ cm). In beiden Fällen wurde exemplarisch ln S^6 gegenüber ln T^3 dargestellt.

vorliegt. Dies ist nochmals in Abbildung 5.4 b) für die ESS-Analyse durch den grau markierten Bereich gezeigt.

Trotz dieser Unsicherheiten können die Veränderung der mit der ESS-Analyse gewonnen Steigungen m, die sich über $m = \zeta_6/\zeta_3$ in die Skalenexponenten umrechnen lassen, in Abhängigkeit vom Abstand untersucht werden.

Abbildung 5.5 zeigt die so bestimmten Steigungen von S^6 über T^3 für 2 Messreihen mit den zwei Zylinderdurchmessern $D = 2\,cm$ und $D = 5\,cm$. Recht deutlich ist die Erhöhung der Steigungen in dem Bereich um $20\,D$ zu erkennen. Das Maximum liegt bei beiden Messungen bei vergleichbarem relativen Abstand $X/D \approx 20$. Für Abstände $X > 60\,D$ ändern sich die Steigungen nicht mehr wesentlich und liegen in etwa konstant bei einem Wert von $\zeta \approx 1,66$, der für die vollentwickelte Turbulenz vorhergesagt wird[2].

Bei den Messungen in den Abständen $X < 5\,D$ sind die Turbulenzgrade größer als 30%. Damit sind die Anstellwinkel der Strömung zum einzelnen X-Draht bei extremen Ereignissen so groß, dass durch die X-Draht Technik Messfehler entstehen. Zusätzlich kommen durch die Verwendung der Taylorhypothese bei hohem Turbulenzgrad weitere Fehler hinzu, so dass die ersten zwei Werte in Abbildung 5.5 recht unsicher sind. Sie sind hier der Vollständigkeit halber eingetragen, um eine Tendenz anzuzeigen, die durch andere Messverfahren überprüft werden müsste. Gaudin erzielt in [32] für ζ_6 zwar vergleichbare Werte für große Abstände des Sensors zum Zylinder, jedoch ist dort die angesprochene Erhöhung von ζ_6 bei mittleren Abständen ($X \approx 20D$) nicht zu beobachten.

[2] Vergleiche dazu auch die Ergebnisse in Kapitel 3.3.3.

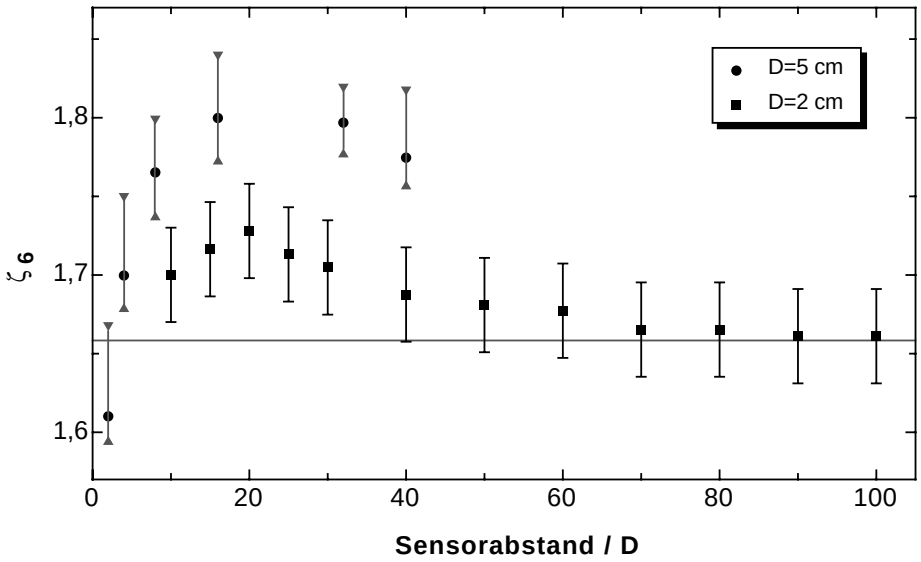


Abbildung 5.5: Die Steigungen von S^6 über T^3 der ESS-Analyse für 2 Messreihen mit den zwei Zylinderdurchmessern $D = 2\,cm$ und $D = 5\,cm$ in Abhängigkeit vom Sensorabstand X. Zusätzlich ist die zu erwartende Steigung für den Idealfall der isotropen Turbulenz nach Kolmogorov eingezeichnet.

Leider ist die physikalische Natur der Änderung der Skalenexponenten recht schwer zugänglich. Zudem wurde oben gezeigt, dass mit der Beschreibung über Skalenexponenten nicht der gesamte Prozess erfasst werden kann. Vom physikalischen Standpunkt aus gesehen ist desweiteren nicht so recht einzusehen, dass und warum gerade bei $X = 20\,D$ ein Maximum der Steigungen zu beobachten ist. Zu erwarten wäre ein monotones Verhalten, da es sich um eine Nachlaufströmung mit turbulenter Ablösung der Wirbel vom Hindernis handelt, die danach immer weiter zerfallen. Möglicherweise ist die Ursache für das Auftreten des Maximums der Steigungen doch in der Unzulänglichkeit der Beschreibungsmethode zu suchen, die durchaus einige Effekte oder Aspekte der veränderten Strömung erfasst, die aber wohl nicht ausreichen.

5.4 Die Inkrement-Verteilungen in der Nähe des Zylinders

Die einzelnen Strukturfunktionen enthalten, wie in Kapitel 3 beschrieben, weniger Informationen über den statistischen Prozess, als die Verteilungen selber. Desweiteren werden über die Skalenanalyse, wie im vorigen Kapitel besprochen, nur Teilaspekte der Strukturfunktionen erfasst, die zudem nicht

in dem für die Analyse der Wirbelstrukturen wichtigen Längenskalenbereich liegen. Dieses legt nahe, einen Blick direkt auf die Verteilungen zu werfen. Da hier der Kaskadenprozess der Turbulenz ein zentraler Aspekt ist, sollen die Verteilungen der Inkremente untersucht werden. Abbildung 5.6 zeigt die Inkrement-Verteilungen der Vertikalkomponente bei der Zylindermessung mit $D = 5\,cm$ für verschiedene Längenskalen.

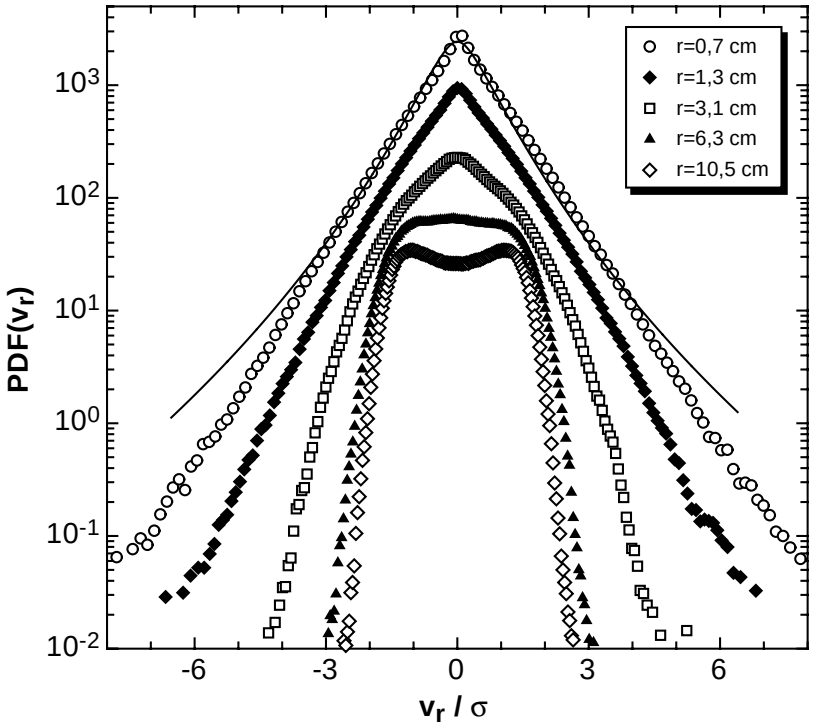


Abbildung 5.6: Inkrement-Verteilungen der Vertikalkomponente bei einer Zylindermessung ($D = 5\,cm$) im Abstand $X = 8\,D$ für verschiedene Längenskalen (Zum Vergleich: $\lambda = 3,9\,mm$.). Für die kleinste Längenskala ist eine Anpassung nach Castaing (Gl. (2.50)) mit eingezeichnet.

Sehr auffällig, besonders im Vergleich mit den Verteilungen, die sich aus Messungen in nahezu voll entwickelter und isotroper Turbulenz weit hinter dem Zylinder (Abbildung 3.22) ergeben, sind die Doppelhöcker der Verteilungen bei großen Längenskalen. In der oben bereits angesprochenen Arbeit von Ninni [49] ist der doppelhöckrige Verlauf der Inkrement-PDF nicht gezeigt, lediglich die unterschiedliche Intermittenz der einzelnen Komponenten ist dort dargestellt. Man erkennt deutlich, dass sich diese Verteilungen nicht mehr durch den Lognormal-Ansatz von Castaing (s. Abschnitt 2.4.3) beschreiben lassen, wie dies noch für die Verteilungen in großem Abstand hinter dem Zylinder der Fall war (vgl. Abbildung 3.22 in Kapitel 3). Ganz besonders können die Doppelhöcker, die bei Längenskalen der halben Wirbelgröße der Karmanwir-

bel auftreten, mit diesem Modell nicht erfasst werden. Das sollte auch so sein, denn Castaing geht von einer isotropen und vollentwickelten Turbulenz aus, die hier nicht vorliegt. Sehr schön ist in den Verteilungen (Abbildung 5.6) zu erkennen, dass für kleine Skalen diese Annahmen wieder eher erfüllt sind. Die Verteilungen nähern sich für kleine Skalen dem Log-Normal-Modell an. Die Abweichungen, die gerade in den Flügeln auftreten, spiegeln die veränderten Skalenexponenten bei der Analyse der Strukturfunktionen im vorigen Abschnitt wieder. Wie sich das Auftreten kohärenter Wirbelstrukturen bei einer Wandströmung in der Nähe der Wand auf die Verteilungsfunktionen auswirkt, wurde von Lamballais et al. in [40] auf numerischem Wege untersucht. Allerdings sind dort lediglich Vergleiche der Änderung gegenüber einer Gaußverteilung gezeigt.

Ziel des weiteren Vorgehens ist es nun, das Verhalten dieser Inkrement-Verteilungen genauer zu beschreiben und damit Rückschlüsse auf die Entwicklung der Turbulenz hinter dem Zylinder zu gewinnen. Dazu bietet sich die im vorigen Kapitel 4 besprochene Markov-Analyse an, da bei dieser Analyse keine Voraussetzungen bezüglich der Isotropie und Homogenität der Strömung gemacht werden.

5.5 Der Markov-Test

Die für die Markov-Analyse einzige Voraussetzung ist die Markov-Eigenschaft des stochastischen Prozesses. Weitere Annahmen, die schon gewisse Eigenschaften dieses Prozesses festlegen, wie zum Beispiel bei der Momentenanalyse die Voraussetzung des Skalenverhaltens oder bei Castaing die Log-Normal Form der Verteilung, sind nicht notwendig. Da hier wieder der Kaskadenprozess untersucht werden soll, der durch die Geschwindigkeitsinkremente beschrieben wird (s. Kapitel 2), muss der Markov-Test bezüglich der Inkremente durchgeführt werden. Es wurden die im vorangehenden Kapitel herausgearbeiteten Tests für die oben bereits angesprochene Vertikalkomponente der Geschwindigkeit bei der Messung in den verschiedenen Entfernungen hinter dem Zylinder durchgeführt. Die Ergebnisse können hier aufgrund des großen Umfangs nur in den wichtigsten Punkten dargestellt werden. So ist in der Messung der Querkomponente bei der Messung in $8\,D$ Entfernung, wie oben bereits festgestellt, der größte Anteil der Karmanschen Wirbel enthalten. Daher werden hier wie im vorigen die Ergebnisse dieser Messreihe dargestellt.

Zunächst seien die Ergebnisse des Chapman-Kolmogorov-Tests, der die Gültigkeit der gleichnamigen Gleichung

$$p(v_1, r_1|v_2, r_2) = \int p(v_1, r_1|v_{r'}, r')p(v_{r'}, r'|v_2, r_2)dv_{r'} \tag{5.1}$$

überprüft, gezeigt. Aufgrund des Auftretens der Karman-Wirbel, wird nun auch für größere Skalen dieser Test wichtig. Daher ist dieser Test in Abbildung 5.7 sowohl für eine Skala in der Nähe der Taylor-Länge (a und b) als auch für eine Skala, die der ermittelten wichtigen Längenskala der Karman-Wirbel (c und d) gezeigt. Die Längenskalen sind bezüglich der Taylor-Länge λ angegeben, die $\lambda = 2,6mm$ bei der Strömung mit dem großen Zylinder ($D = 5\,cm$) und zu $\lambda = 2,7mm$ bei der Strömung mit dem kleinen Zylinder ($D = 2\,cm$) ermittelt wurde.

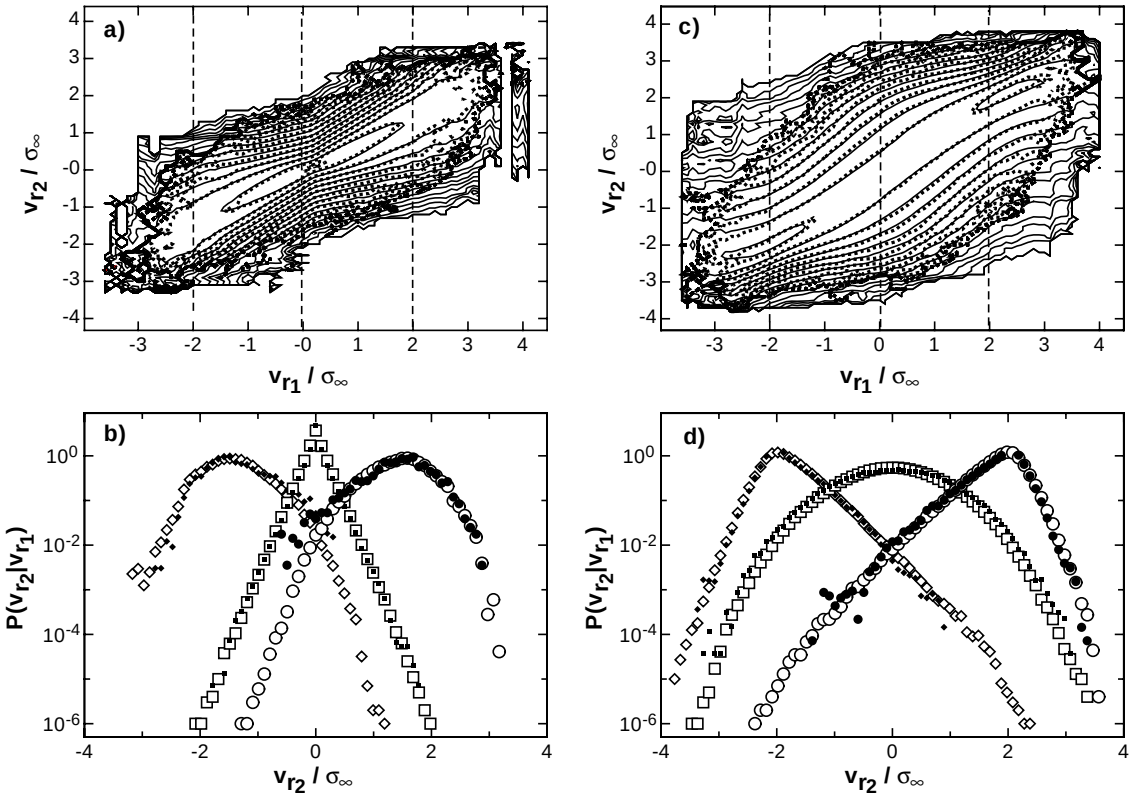


Abbildung 5.7: Überprüfung der Chapman-Kolmogorov-Gleichung für kleine Längenskalen $r_1 \approx 4\lambda$, $r' \approx 4,5\lambda$ und $r_2 \approx 5\lambda$ (a und b), sowie bei Längenskalen zwischen $r_1 \approx 38\lambda$ und $r_2 \approx 46\lambda$, die dem Auftreten der Doppelhöcker entspricht (c und d). Die unteren Bilder (b und d) sind wiederum Schnitte an den oben eingezeichneten Stellen.

Es ist für beide Fälle, gegenüber der Messung in der isotropen Strömung des Gitters (s. Abbildung 4.2) ein in der Form abweichendes Verhalten der bedingten Wahrscheinlichkeiten festzustellen. Bei kleinen Skalen (a) ist eine leichte Einschnürung im Bereich von $v_{r_1} = 0$ zu erkennen, was einer in diesem Bereich spitzeren Verteilung (siehe b) entspricht. In Teil c) spiegelt sich der Einfluss der Wirbelstrukturen in der s-förmigen Verbiegung der bedingten Wahrscheinlichkeit wieder. Für die gezeigten Längenskalenbereiche ist die

Übereinstimmung der beiden Seiten der so getesteten Chapman-Kolmogorov-Gleichung sehr gut, was in den Teilen b) und d) besonders deutlich zu erkennen ist. Der Test wurde auch für weitere Längenskalen durchgeführt. Dabei traten bei einigen Längenskalen zwischen den in der Abbildung dargestellten auch abweichende Ergebnisse auf (s.u.).

Eine weitere Möglichkeit, die Markov-Eigenschaften zu testen, ist die Überprüfung der Definition des Markov-Prozesses, die für $n = 3$

$$p(v_1, r_1|v_2, r_2; v_3, r_3) \;=\; p(v_1, r_1|v_2, r_2) \tag{5.2}$$

lautet. Die Gleichung kann mittels des im vorigen Kapitel ausführlich besprochenen Wilcoxon-Tests für ausgewählte Längenskalen r_1, r_2, r_3 überprüft werden. Bei diesem Test soll der dort (Gleichung (4.34)) definierte Erwartungswert $\langle \Delta Q^* \rangle$ möglichst dicht am Idealwert eins liegen, der bei Gleichheit der zu testenden Verteilungen, hier linke und rechte Seite der Gleichung (5.2), angenommen wird. Wie zuvor sollen die Abstände zwischen den Längenskalen gleich sein, also $\Delta r = r_2 - r_1 = r_3 - r_2$.

Abbildung 5.8 zeigt den Verlauf des Erwartungswertes $\langle \Delta Q^* \rangle$ in Abhängigkeit von Δr, analog zu Abbildung 4.5 für verschiedene Basislängen r_1. In allen gezeigten Fällen ist ein zum isotropen Fall vergleichbares Verhalten zu beobachten. Die Erwartungswerte von $\langle \Delta Q^* \rangle$ starten auf hohem Niveau ($\gg 10$), um relativ schnell auf Werte, die vergleichbar dicht bei 1 liegen abzufallen (zwischen 1,1 und 1,7). Verglichen mit der isotropen Strömung fällt der Wert ein wenig schneller ab. Der erreichte mittlere Level, um den die Werte dann schwanken, liegt dabei ein wenig höher (1,4 statt 1,1). Für größere Längenskalendifferenzen $\Delta r > 7mm$ ist eine erhöhte Streuung der Erwartungswerte $\langle \Delta Q^* \rangle$ zu beobachten, deren Ursache statistischer Natur ist. Dort nimmt die Grundgesamtheit der zugrunde liegenden Werte merklich ab. Das bedeutet allerdings auch, dass der Wilcoxon-Test für noch größere Längenskalendifferenzen nicht mehr verwendet werden kann.

Um dennoch zu testen, ob Gleichung (5.2) auch für größere Längenskalendifferenzen erfüllt ist, können die doppelt bedingten Wahrscheinlichkeiten direkt mit den einfach bedingten Wahrscheinlichkeiten verglichen werden.

Abbildung 5.9 zeigt dies exemplarisch für die Basislänge $r_1 = 23,3\,\lambda$, sowie die für zwei Δr, die jenseits des in 5.8 b) gezeigten Bereiches des Wilcoxon-Tests liegen. Wenn auch die Abweichungen ein wenig größer sind als bei der isotropen Gitterströmung (vgl. Abb. 4.3), so bestätigt Abbildung 5.9 doch die Gültigkeit von Gleichung (5.2) sehr gut.

Allerdings gibt es in Länenskalenbereichen zwischen den bisher betrachteten charakteristischen Längenskalen auch Probleme mit der Gültigkeit der Markov-Eigenschaften. Abbildung 5.10 zeigt für dieselbe Messung wie oben ein Beispiel, in dem die Markov-Eigenschaft höchst wahrscheinlich nicht erfüllt ist.

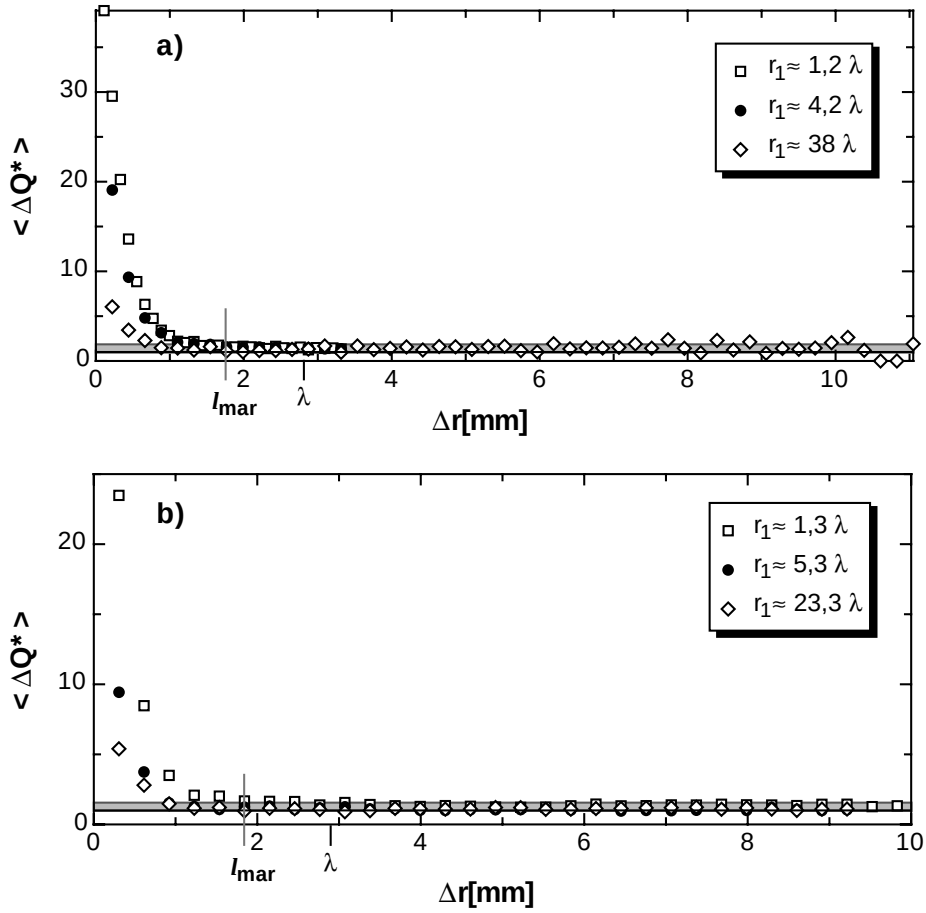


Abbildung 5.8: Wilcoxon Test im Inhomogenen für verschiedene Längenskalen r_1. Teil a) zeigt den Test für die obige Messung in $8\,D$ Entfernung beim großen Zylinder $D = 5\,cm$, Teil b) für die Strömung in $10\,D$ Entfernung beim kleinen Zylinder $D = 2\,cm$.

Teil a) dieser Abbildung zeigt nicht übereinstimmende Konturlinien der doppelt bedingten mit der einfach bedingten Wahrscheinlichkeitsverteilung. Teil b) zeigt einen Wilcoxon-Test, bei dem der zu bestimmende Erwartungswert noch bevor er auf Eins abfallen kann wieder ansteigt, was anzeigt, dass hier die Markov-Eigenschaften verletzt sind.

In Kapitel 4 wurde angesprochen, dass durch geeignetes Erhöhen der Dimension der Beschreibung der Prozess immer zu einem Markov-Prozess übergeführt werden kann. Da die hier durchgeführte Auswertemethode noch sehr jung ist, war zu der Zeit, in der diese Analyse durchgeführt wurde, jedoch nur eine eindimensionale Beschreibung möglich. Derzeit wird die Analyse auf mehrere Dimensionen erweitert. Malte Siefert führte eine mehrdimensionale Analyse einer chaotischen Zeitserie durch [65], die Mathias Karth jüngst auf die turbulente Kaskate übertrug [7]. Da die Wirbelstrukturen zweidimensio-

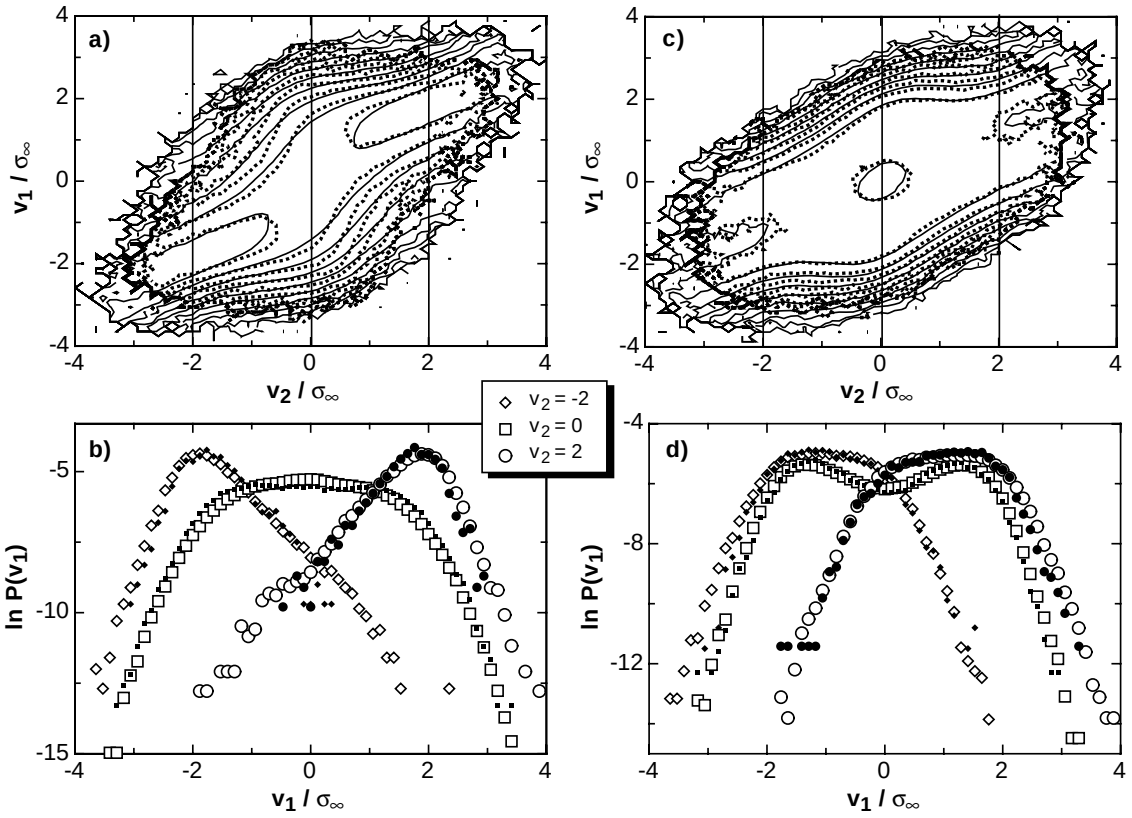


Abbildung 5.9: Direkter Vergleich von einfach (dünne Linien bzw. offene Symbole) und doppelt bedingten Wahrscheinlichkeiten (gestrichelte Linien bzw. volle Symbole) bei der Basis-Längenskala $r_1{=}23,3\,\lambda$. In Teil a) und b) ist $\Delta r{=}6,9\,\lambda$, in Teil c) und d) ist $\Delta r{=}23,3\,\lambda$.

nal sind (s. Abbildung 3.17), wird die vollständige Markov-Eigenschaft bei einer zweidimensionalen Betrachtung erwartet. Allerdings ist der Effekt, der die Inkrementbildung und damit die Beschreibung im Inkrementraum, auf die Markov-Eigenschaft noch nicht geklärt, da durch die Betrachtung des Prozesses der Kaskade die zeitliche Abfolge verloren geht.

Malte Siefert fand heraus, dass auch bei nicht erfüllter Markov-Eigenschaft durch die Analyse der erste Kramers-Moyal-Koeffizient korrekt bestimmt wird [65]. Bestimmt man also die Kramers-Moyal-Koeffizienten, so ist zu verifizieren, dass mit diesen erhaltenen Koeffizienten die beobachteten Änderungen der Wahrscheinlichkeitsverteilungen (s. Abbildung 5.6) richtig wiedergegeben werden. Dieses wird in Abschnitt 5.7 ausführlich getestet. Man hat dann eine sogenannte *effektive Beschreibung* dieser Änderungen der Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Diese gibt zwar noch nicht den gesamten stochastischen Prozess wieder, ist jedoch bereits eine gute Annäherung an diesen. Eine solche effektive Beschreibung lässt bereits einige neue Interpretationen bezüglich der

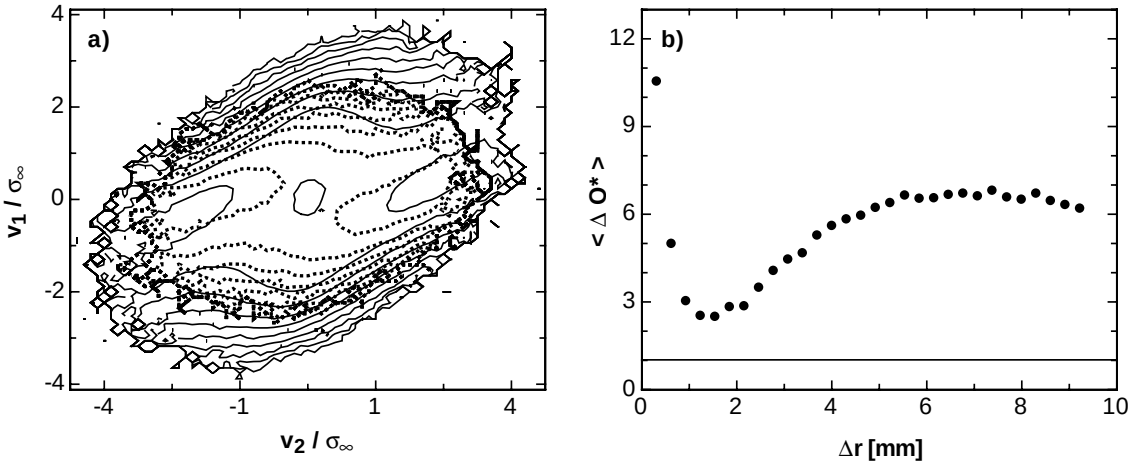


Abbildung 5.10: Teil a) zeigt einen Vergleich der doppelt bedingten mit der einfach bedingten Wahrscheinlichkeit bei $r_1 = 23,3\lambda$ und mit im Vergleich zu Abbildung 5.8 vergrößertem $\Delta r = 16,7\lambda$, Teil b) den Wilcoxon Test mit $r_1 = 16,7\lambda$ für die Zylindermessung mit $D = 5cm$ und $X = 10D$.

Strömung zu, die mit den in den Kapiteln 2 und 3 beschriebenen herkömmlichen Methoden nicht geleistet werden können.

Diese Tatsachen und dass die Markov-Eigenschaften in wichtigen Bereichen als erfüllt angenommen werden können[3], rechtfertigen es, im Folgenden die Kramers-Moyal-Koeffizienten für die nicht vollentwickelte Turbulenz zu bestimmen.

5.6 Die Kramers-Moyal-Koeffizienten

Um die Differentialgleichung zur Beschreibung der Inkrement-Verteilungen aufzustellen, sind nun die Kramers-Moyal-Koeffizienten zu bestimmen. Dazu müssen zunächst aus den Daten die Vorkoeffizienten[4] $M_k(v, r, \Delta r)$ mittels Gleichung

$$M_k(v, r, \Delta r) \quad = \quad \frac{r}{k!\,\Delta r} \int_{-\infty}^{+\infty} (\tilde{v} - v)^k \; p\,(\tilde{v}, r - \Delta r | v, r)\; d\tilde{v} \qquad (5.3)$$

bestimmt werden (s. (4.37) Kapitel 4). Danach erhält man durch den Grenzübergang $\Delta r \to 0$ die Kramers-Moyal-Koeffizienten $D_k(v, r)$. In Abschnitt 4.4.2

[3] Die Markov-Eigenschaften können nicht streng bewiesen werden (s. Kapitel 4).

[4] auch *bedingte Momente* genannt

wurde dargelegt, dass insbesondere für die nicht isotrope Turbulenz das direkte Extrapolationsverfahren am besten geeignet ist, da hier keine Annahmen über die Form der Koeffizienten gemacht werden müssen. Die direkte lineare Extrapolation setzt ein lineares Verhalten der $M_k(v, r, \Delta r)$ über Δr im Bereich zwischen l_{mar} und $2..3\, l_{mar}$ voraus. Dieses muss natürlich für die Zylinderströmung erneut auf Gültigkeit überprüft und der Linearitätsbereich bestmöglich bestimmt werden. Die Abbildung 5.11 zeigt die Vorkoeffizienten $M_1(v, r, \Delta r)$ und $M_2(v, r, \Delta r)$ der Strömung in $10\, D$ Entfernung zum Zylinder $(D = 2\, cm)$ bei kleinen Längenskalen $r = 6\lambda$ in a) und b), sowie bei großen Längenskalen $r = 23, 3\lambda$ in c) und d).

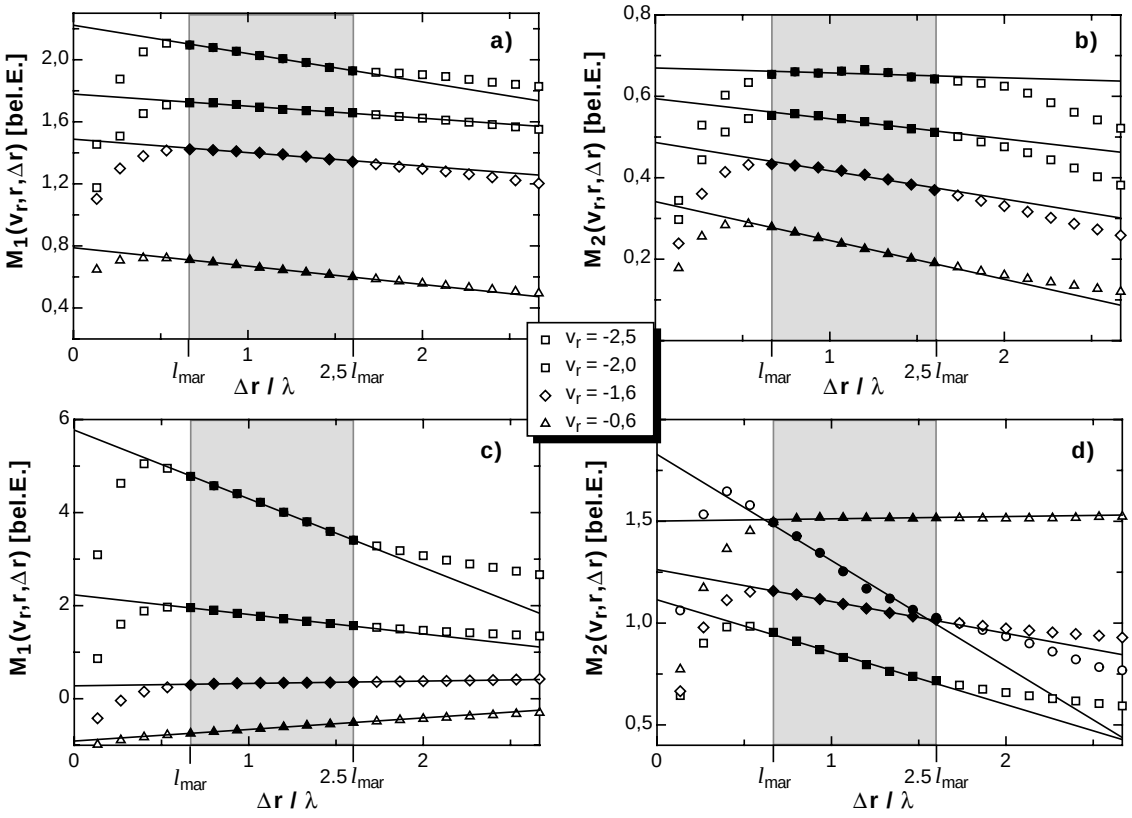


Abbildung 5.11: Überprüfung der direkten Extrapolation bei einer Zylindermessung in geringem Abstand ($X = 10\, D$) hinter dem Zylinder mit $D = 2\, cm$. Teil a) und b) zeigen M_1 bzw. M_2 bei einer kleinen Basislänge $r_1 = 6\lambda$, Teil c) un d) bei der Länge $r_1 = 23, 3\lambda$, bei der in den Inkrementverteilungen die Doppelhöcker auftreten.

Aufgrund der Übersichtlichkeit wird die Extrapolation wiederum exemplarisch nur für einige v_r dargestellt (vgl. Abb. 4.9). Die Verläufe der Werte von M_1 und M_2 legen erneut eine lineare Extrapolation nahe, die in diesem Fall am besten über den Bereich von l_{mar} bis $2, 5\, l_{mar}$ anzupassen ist. Der Bereich ist gegenüber l_{mar} bis $3\, l_{mar}$ bei der isotropen Gitterströmung (s. oben) leicht ein-

geschränkt, aber durchaus noch groß genug, um dieses Vorgehen der direkten Extrapolation zu rechtfertigen.

Damit können also die Kramers-Moyal-Koeffizienten auch für die Strömung dicht hinter dem Zylinder (hier $10\,D$) bestimmt werden. Im Folgenden sollen die erzielten Ergebnisse für die Koeffizienten D_1 bis D_4 in dieser Strömung nacheinander vorgestellt werden.

Der Drift-Koeffizient D_1

Abbildung 5.12 zeigt den per direkter Extrapolation ermittelten ersten Kramers-Moyal-Koeffizienten D_1 für die zwei (oben schon verwendeten) charakteristischen Längenskalen $r{=}17,3\,mm{=}6\lambda$ und $r{=}67,3\,mm{=}23,3\lambda$.

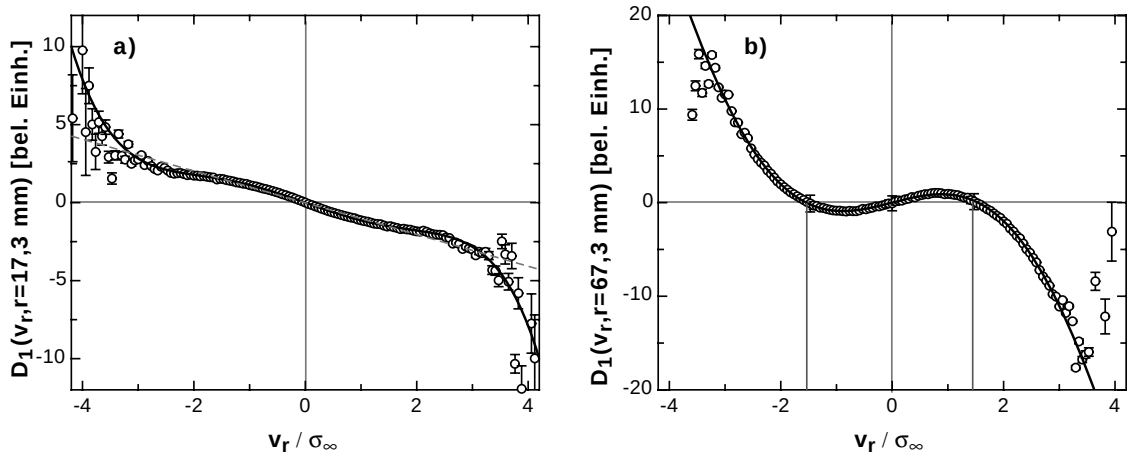


Abbildung 5.12: Durch direkte Extrapolation ermittelter erster Kramers-Moyal-Koeffizient D_1 für die Längenskalen $r{=}17,3\,mm{=}6\lambda$ (a) und $r{=}67,3\,mm{=}23,3\lambda$ (b). Die durchgezogenen Kurven zeigen die Anpassung mit $D_1 = a_1 v_r + a_2 v_r^3 + a_3 v_r^5$. Weiterhin sind in b) die Nullstellen von D_1 markiert.

Für kleine Skalen (Teil a) ist ein mit der isotropen Gitterströmung vergleichbarer näherungsweise linearer Verlauf mit negativer Steigung, von $D_1(v_r)$ zu beobachten. Überlagert wird diese Gerade von kleinen Abweichungen. Gänzlich verschieden verläuft $D_1(v_r)$ für Längenskalen in dem Bereich, in dem in den Inkrement-Verteilungen die Doppelhöcker zu erkennen waren. Während D_1 in der Gesamttendenz weiterhin von positiven zu negativen Werten fällt, ist die Steigung in $v_r = 0$ nun positiv. Dies resultiert in nun 3 Nulldurchgängen, was 3 Fixpunkten in der dahinter liegenden Dynamik entspricht. Dieses wird deutlich, wenn man sich die Bedeutung von D_1 zum Beispiel anhand der Langevin-Gleichung (4.18) wieder in Erinnerung ruft. Der Fixpunkt bei $v_r = 0$ ist instabil (positive Steigung), während die anderen zwei Fixpunkte stabil

sind (negative Steigung). Damit werden vermehrt Ereignisse an diesen Stellen auftreten, was dann zwei Maxima in der Verteilung ergibt. Das für kleine Skalen beobachtete Maximum in $v_r = 0$ wird nun zu einem Minimum. Dieses entspricht exakt dem Doppelhöcker in den Inkrement-Verteilungen, wie die folgende Abbildung 5.13 zeigt, in der die Inkrement-Verteilung für die Strömung in $10\,D$ Abstand hinter dem kleinen Zylinder ($D = 2\,cm$), diesmal zum besseren Vergleich mit Abbildung 5.12 b) auf σ_∞ normiert, dargestellt ist (vgl. auch Abb. 5.6).

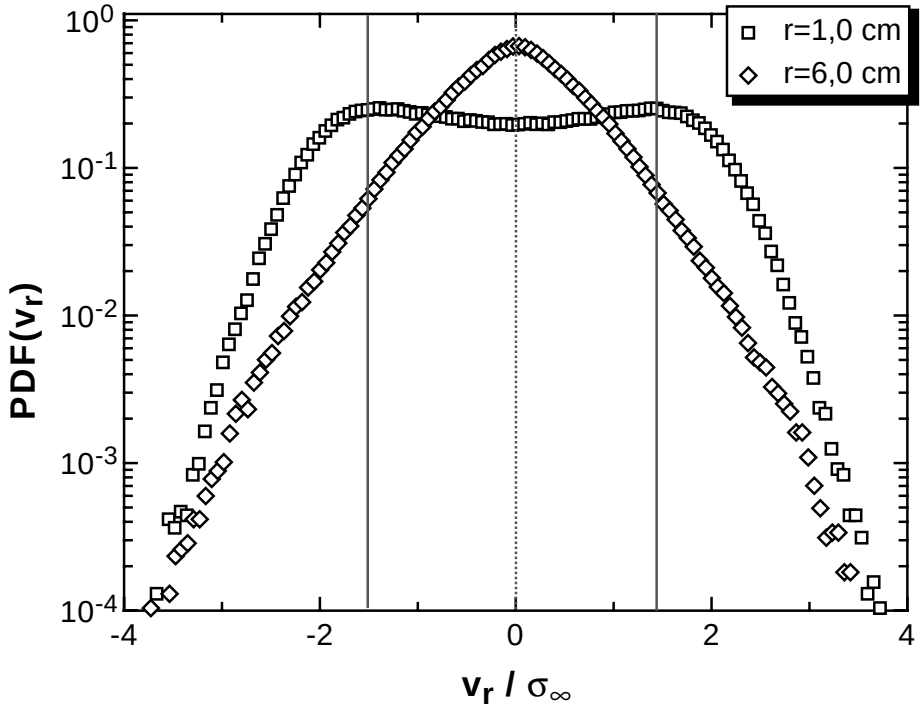


Abbildung 5.13: Inkrement-Verteilung für die Strömung in $10\,D$ Abstand hinter dem Zylinder mit $D = 2\,cm$ auf σ_∞ normiert bei kleiner und großer Längenskala. Zum Vergleich sind die Nullstellen von D_1 aus Abbildung 5.12 b) für die große Längenskala markiert.

Es ist nun von Interesse, diese prinzipielle Änderung des Verlaufs von $D_1(v_r)$ für die verschiedenen Längenskalen zu beschreiben. Einen ersten qualitativen Eindruck gibt die nächste Abbildung 5.14, die die ermittelten $D_1(v_r, r)$ im Längenskalenbereich von $6\,mm$ bis $75\,mm$, also dem angesprochenen Bereich, 3-dimensional darstellt. In dieser Darstellung nimmt die Längenskala r von vorne nach hinten zu, so dass die hervorgehobene Kurve im Vordergrund Teil a) und die hintere Kurve dem s-förmigen Verlauf in Teil b) der Abbildung 5.12 entspricht. Man erkennt eine kontinuierliche Änderung vom nahezu linearen Verlauf bei kleinen Skalen zu dem beobachteten s-förmigen Verhalten bei Längenskalen, die im Bereich der Karman-Wirbelgröße liegen.

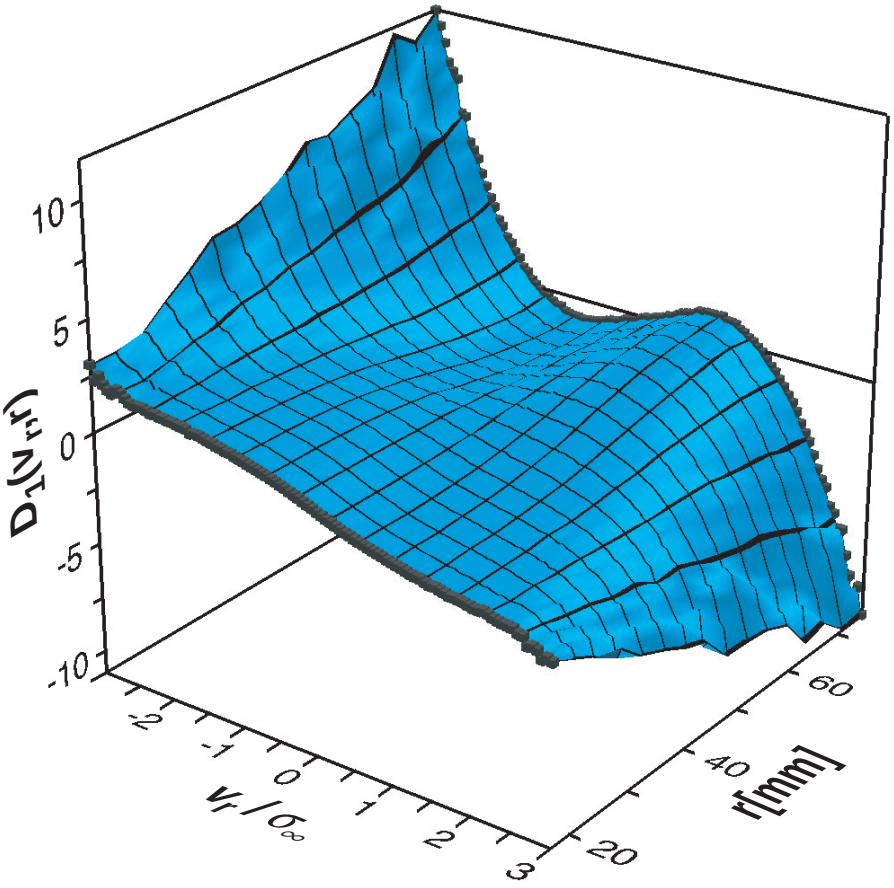


Abbildung 5.14: 3-dimensionale Darstellung von $D_1(v_r, r)$ der Vertikalkomponente der Geschwindigkeit der Strömung in $10\,D$ Abstand hinter dem Zylinder mit $D = 2\,cm$.

Ein erster Versuch einer Parametrisierung dieses Verhaltens wäre ein Polynomansatz 3. Grades. Mit diesem Ansatz können die wesentlichen Merkmale bereits recht gut wiedergegeben werden, jedoch sind die kleinen Schwankungen, die beispielsweise in Abbildung 5.12 a) zu erkennen sind, mit diesem Ansatz nicht modellierbar. Daher wurde der Ansatz

$$D_1(v_r, r) = a_1(r)v_r + a_2(r)v_r^3 + a_3(r)v_r^5 \tag{5.4}$$

verwendet, der ebenfalls mit 3 Parametern, die natürlich noch von r abhängen, auskommt. Bei der Anpassung wurden für a_3 keine positiven Werte zugelassen, da sonst beispielsweise für große v_r die angepasste Funktion wieder steigen würde. Der Parameter a_1 gibt die Steigung im Punkt $v_r = 0$ an. Ist also a_1 positiv und a_2 negativ (a_3 ist ja ebenfalls < 0), so ergibt sich der beobachtete s-förmige Verlauf von $D_1(v_r, r)$. Umgekehrt tritt der für kleine Skalen

beobachtete monoton fallenden Verlauf von D_1 bei $a_1 < 0$ auf ($a_3 < 0$).

Die Abhängigkeit der Parameter a_i von der Längenskala r ist in der folgenden Abbildung 5.15 gezeigt. Der grau hinterlegte Bereich markiert die in der 3-dimensionalen Darstellung (Abb. 5.14) verwendeten Längenskalen.

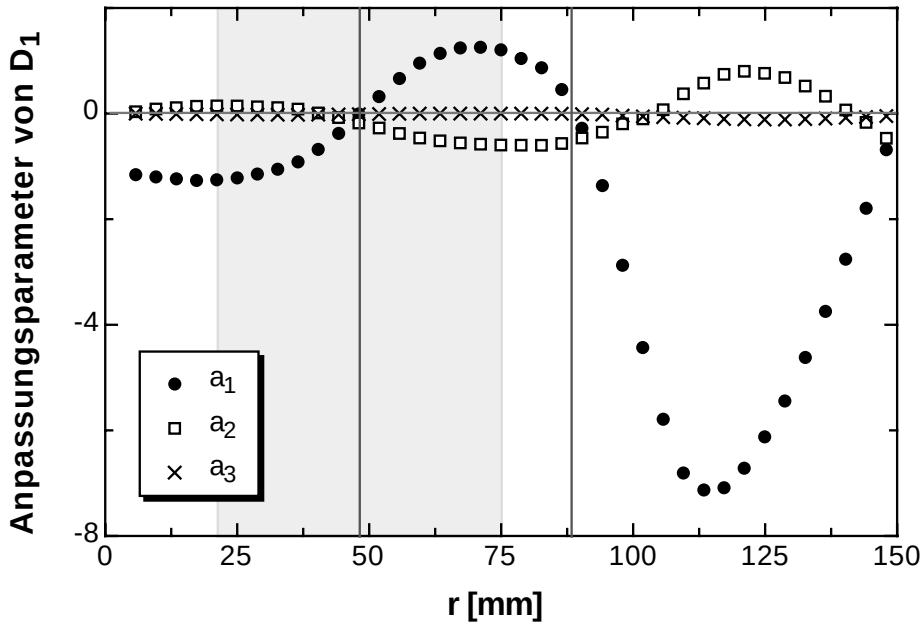


Abbildung 5.15: Die Parameter a_1, a_2, a_3 der Anpassung von D_1 nach Gleichung (5.4). Der in Abbildung 5.14 dargestellte Bereich ist grau hinterlegt. Desweiteren sind die Nulldurchgänge von a_1 markiert.

Für alle drei Parameter ist eine stetige Änderung mit r zu erkennen. Der Parameter a_3 ist im Vergleich zu den beiden anderen Parametern sehr klein, stellt also nur eine Korrektur des globalen Verlaufs von D_1 dar. Wie erwartet, startet a_1 bei kleinen Längenskalen r mit negativen Werten und wird dann positiv. a_2 verläuft in etwa gegenläufig zu a_1. Der Bereich, in dem a_1 positiv ist, also demzufolge $D_1(v_r)$ drei Nullstellen besitzt, ist durch zwei senkrechte Linien markiert.

Der Diffusions-Koeffizient D_2

Der 2. Kramers-Moyal-Koeffizient D_2 wird auch, wie in Kapitel 4 schon beschrieben, Diffusions-Koeffizient genannt und beschreibt die Art und die Stärke des stochastischen Anteils des Prozesses. Wie Abbildung 5.11 zeigt, kann D_2 in analoger Weise mit direkter Extrapolation bestimmt werden. Abbildung 5.16 zeigt für die bei D_1 bereits verwendeten Längenskalen die so bestimmten Diffusions-Koeffizienten D_2.

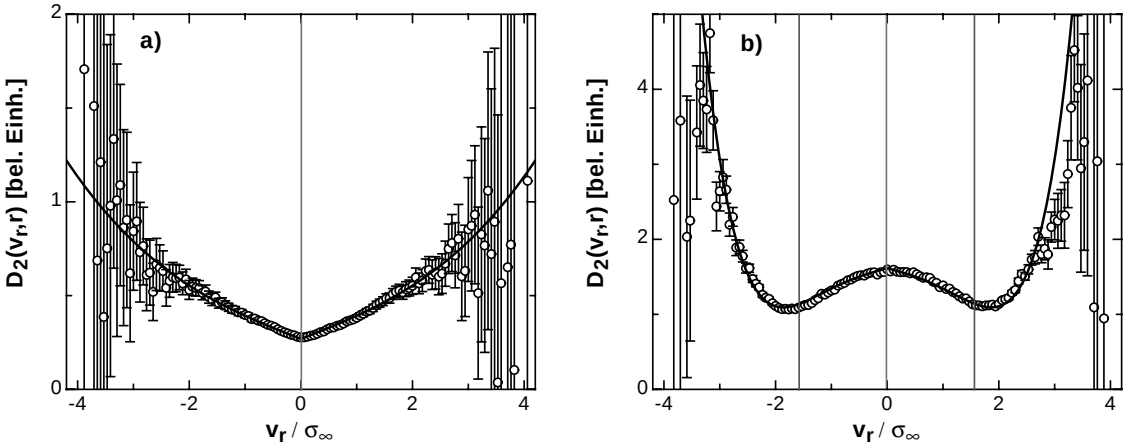


Abbildung 5.16: Durch direkte Extrapolation ermittelter zweiter Kramers-Moyal-Koeffizient D_2 für die Längenskalen r=17, 3 mm=6λ (a) und r=67, 3 mm=23, 3λ (b). Die durchgezogenen Kurven zeigen die Anpassung mit $D_2 = b_1 + b_2|v_r| + b_3|v_r|^3 + b_4|v_r|^5$. Weiterhin sind in b) zum Vergleich die Nullstellen von D_1 markiert.

Bei kleiner Längenskala (Teil a) besitzt D_2 ein Minimum bei $v_r = 0$, zeigt jedoch hier einen stärkeren Knick, als bei der isotropen Gitterströmung (siehe Abbildung 4.11 b) vert. Komponente). Sehr verschieden davon ist, wie eigentlich zu erwarten der Verlauf von D_2 für die große Längenskala der Wirbelstrukturen. Bei dieser Längenskala treten nun zwei lokale Minima in etwa an den Nullstellen von D_1 auf. Mit dem Hintergrund, dass D_2 den Rauschanteil beschreibt, lässt sich dieses Verhalten dahingehend interpretieren, dass das Rauschen, also die Fluktuationsstärke, in der Nähe der stabilen Fixpunkte minimiert wird: ein typisches Verhalten für stochastische Phänomene in der Nähe von Fixpunkten.

folgenden Abbildung 5.17, wie oben schon für D_1 in Abbildung 5.14, eine 3-dimensionale Darstellung gezeigt, die die Koeffizienten D_2 für Längenskalen im Bereich von $16\,mm$ bis $76\,mm$ wiedergibt. Wiederum nimmt in dieser Darstellung die Längenskala r von vorne nach hinten zu. Die im Vordergrund herausgehobenen Werde entsprechen also Teil a) und die herausgehobenen Werte im Hintergrund entsprechen Teil b) von Abbildung 5.16. Sehr schön ist die stetige Änderung von D_2 in Abhängigkeit von r zu sehen. Die beobachtete qualitative Änderung scheint hier schon bei etwas kleineren Längenskalen als beim Drift-Koeffizienten D_1 zu beginnen. Um dies eindeutig zu belegen ist eine quantitative Auswertung nötig.

Es stellt sich nun wiederum die Aufgabe eine Funktion zu finden, die mit entsprechend gewählten Parametern den Verlauf von $D_2(v_r)$ über alle Längenskalen hinweg beschreibt. Für große Längenskalen zeigt $D_2(v_r)$ einen

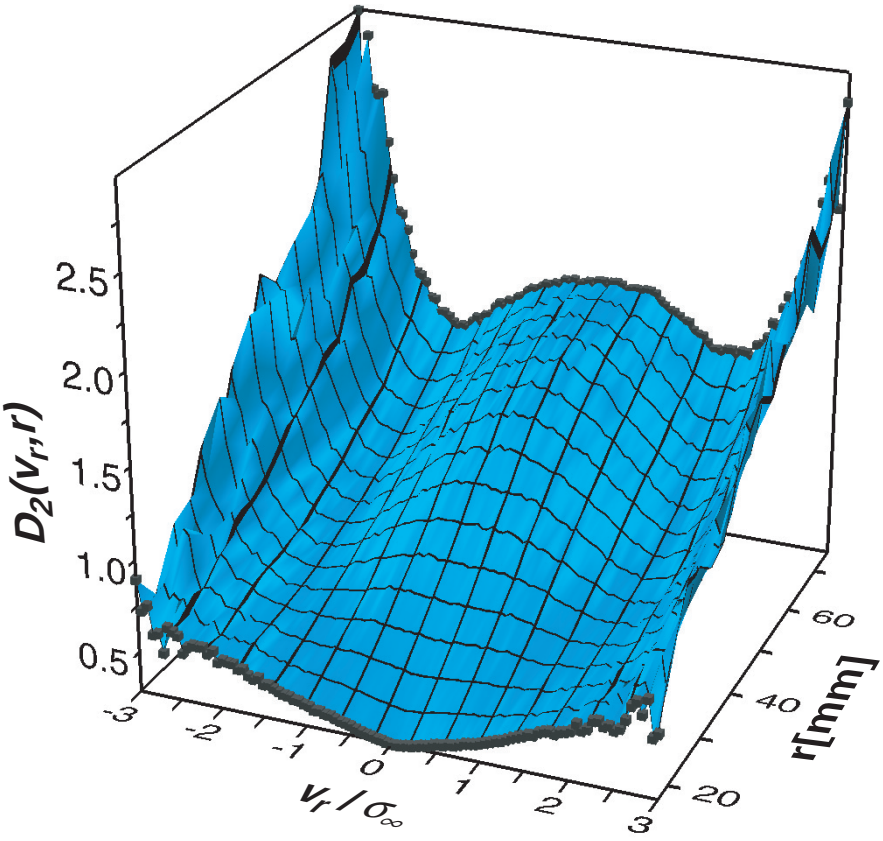


Abbildung 5.17: 3-dimensionale Darstellung von $D_2(v_r, r)$ der Vertikalkomponente der Geschwindigkeit der Strömung in $10\,D$ Abstand hinter dem Zylinder mit $D = 2\,cm$.

Verlauf, der ein Polynom 4. Grades nahe legt. Jedoch kann damit D_2 für die kleinen Skalen nicht adäquat erfasst werden; der angesprochene Knick in $v_r = 0$ ist zu scharf (vgl. Abbildung 5.16). Dieser Knick lässt sich über eine Potenz des Absolutbetrages von v_r am besten wiedergeben. Damit motiviert sich folgender Ansatz für den Drift-Koeffizienten

$$D_2(v_r, r) = b_1(r) + b_2(r)|v_r| + b_3(r)|v_r|^3 + b_4(r)|v_r|^5, \tag{5.5}$$

der sich zudem als bester Kompromiss zwischen adäquater Beschreibung und Zahl der Parameter herausstellte. Die sich durch die Anpassung an D_2 bei entsprechender Längenskala r ergebenden Parameter $b_i(r)$ sind in Abbildung 5.18 gezeigt.

Wie schon zuvor bei der Analyse von D_1, ist der in der 3-dimensionalen Darstellung (Abbildung 5.17) verwendete Skalenbereich grau hinterlegt. Desweiteren ist der Skalenbereich, in dem D_1 drei Nullstellen besitzt (d.h. $a_1(r) >$

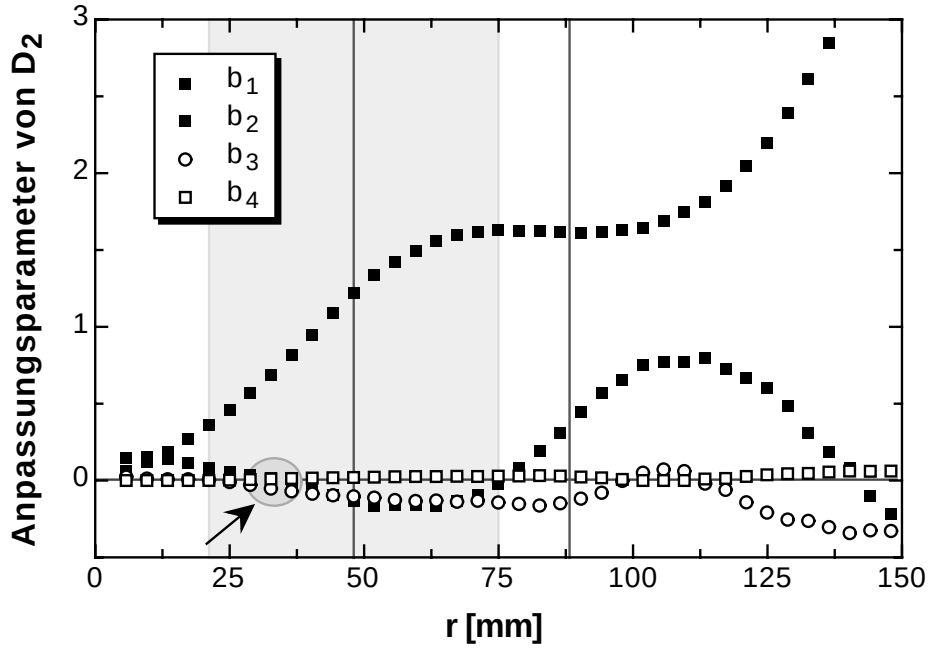


Abbildung 5.18: Die Parameter $b_1 ... b_4$ der Anpassung von D_2 nach Gleichung (5.5). Zum Vergleich sind die Nulldurchgänge von Parameter a_1 des Drift-Koeffizienten D_1 markiert. Außerdem ist wieder der in Abbildung 5.17 dargestellte Bereich grau hinterlegt.

0) analog zu Abbildung 5.15 durch zwei senkrechte Linien markiert. Nun bestätigt sich die obige Vermutung, dass die Doppelmuldenform von D_2, die durch negative b_2 und b_3 bei positivem b_4 gegeben ist, bereits bei kleineren Skalen (bei ca. $30\,mm$) als der s-förmige Bereich von D_1 beginnt. In Abbildung 5.18 ist dies durch den Pfeil gekennzeichnet.

Aus der nichtlinearen Dynamik ist bekannt, dass sich (bei Parameteränderung) aufkommende Bifurkationen, also strukturelle Änderungen im Verhalten eines verrauschten Systems, zunächst in einem veränderten Rauschverhalten bemerkbar machen. Erst später bricht dieses Verhalten quasi durch und manifestiert sich im Systemverhalten, was dann im deterministischen Teil, also im Drift-Term D_1 beobachtet werden kann. Ein solches Verhalten ist hier mit der Längenskala als Parameter zu beobachten.

Die Koeffizienten D_3 und D_4

Nun gilt es zu untersuchen, ob die oben bestimmten ersten zwei Kramers-Moyal-Koeffizienten bereits genügen und sich der stochastische Prozess damit mit einer Fokker-Planck-Gleichung beschreiben lässt. Die höheren Kramers-Moyal-Koeffizienten geben Korrekturen des stochastischen Anteils bei nicht

gaußschem Rauschen an.

Im vorigen Kapitel 4 wurde das Pawula-Theorem beschrieben, nachdem es genügt nachzuweisen, ob der 4. Kramers-Moyal-Koeffizient Null ist, um zu zeigen, dass alle Koeffizienten der Ordnung $n > 2$ verschwinden. Die folgende Abbildung 5.19 zeigt in Teil b) den vierten Kramers-Moyal-Koeffizienten berechnet bei großer Längenskala $r \approx 23\lambda$.

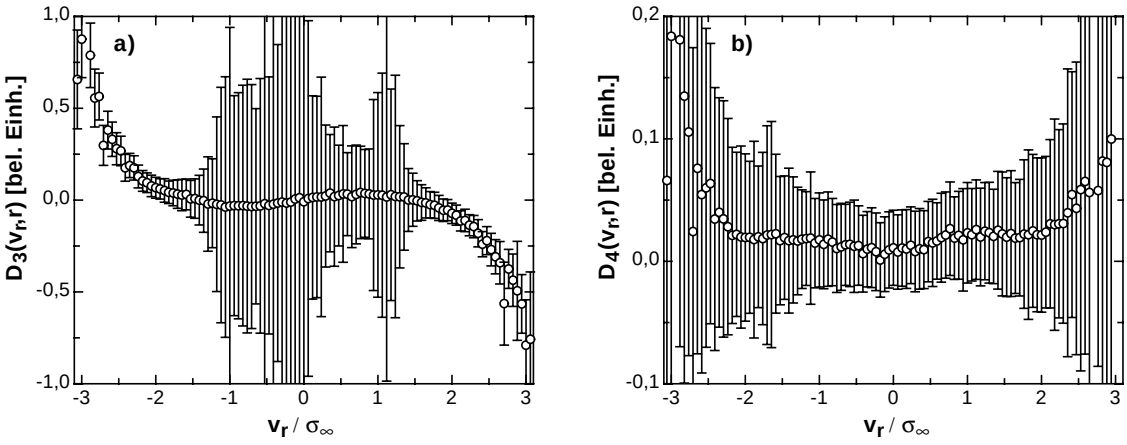


Abbildung 5.19: D_3 (Teil a) und D_4 (Teil b) der Vertikal-Komponente der Zylindernachlaufströmung in $10\,D$ (s.o.) Abstand für die Längenskala r=$67,3\,mm$=$23,3\lambda$.

Die Werte von D_4 sind in etwa um den Faktor 50 kleiner als beispielsweise D_2, können aber eventuell doch nicht als verschwindend klein angenommen werden. Leider sind die Fehler zu groß um darüber eine exakte Aussage machen zu können. Abbildung 5.19 a) zeigt D_3 für die gleiche Längenskala, wie D_4 in Teil b). Die Werte von D_3 sind in etwa 10 mal kleiner als die von D_2. Fehler von D_3 sind, verglichen mit D_1 oder D_2, sehr groß, hier besonders im Bereich zwischen $-2\sigma_\infty$ und $2\sigma_\infty$. Dennoch ist D_3 in den Randbereichen wohl von Null verschieden, was eine leichte asymmetrische Korrektur des gaußförmigen Rauschens bedeutet. Der genaue physikalische Grund dieser Verzerrung konnte bislang noch nicht herausgefunden werden. Möglicherweise liegt die Ursache auch in der Messung begründet.

Da D_3 und D_4 verglichen mit den ersten beiden Kramers-Moyal-Koeffizienten klein sind und damit auch nur eine kleine Korrektur des Gaußschen Rauschens darstellen, ist anzunehmen, dass mit der Fokker-Planck-Gleichung, die nur diese ersten beiden Koeffizienten beinhaltet, der stochastische Prozess gut beschrieben werden kann. Dieses wird nun im nächsten Abschnitt direkt getestet.

5.7 Lösung der Fokker-Planck-Gleichung

Da die Koeffizienten D_3 und D_4, wie im vorigen Abschnitt gesehen, klein sind im Vergleich zu D_1 und D_2, stellt die Beschreibung des Prozesses durch eine Fokker-Planck-Gleichung (4.16) bzw. (4.17) (siehe Kapitel 4) zumindest eine gute Näherung dar. Um dies (und gleichzeitig die Koeffizienten) zu verifizieren kann nun die Fokker-Planck-Gleichung

$$-r\,\frac{\partial}{\partial r}\,p(v,r) \;=\; \left\{ -\frac{\partial}{\partial v}\,D_1(v,r) \;+\; \frac{\partial^2}{\partial v^2}\,D_2(v,r) \right\}\; p(v,r), \qquad (5.6)$$

mit den ermittelten Koeffizienten D_1 und D_2 nummerisch gelöst und diese Lösung mit den Wahrscheinlichkeitsverteilungen aus dem Experiment verglichen werden. Damit wäre die innere Konsistenz bestätigt und gezeigt, dass die Fokker-Planck-Gleichung die Änderung der Wahrscheinlichkeitsverteilungen durch den stochastischen Prozess in richtiger Weise beschreibt.

Für die nummerische Lösung von Gleichung (5.6) wird eine Startverteilung benötigt, von der ausgehend iterativ die Lösung für die einzelnen Längenskalen berechnet wird. Dabei wird das Lösungsverfahren für kleine Schrittweiten nach [59] verwendet. Abbildung 5.20 zeigt die verwendete Startverteilung bei einer Längenskala $r = 82,6\,mm$ mit der für die Nummerik notwendigen Kurvenanpassung.

Als Anpassung wurde im Kernbereich $-2,5 < v_r/\sigma_\infty < 2,5$ (s. Abbildung 5.20) eine Überlagerung von 3 Gauß-Kurven gewählt, um die Ausbuchtungen gut modellieren zu können. Die Ränder wurden dann jeweils mit einem einfachen gaußschen Abfall beschrieben. Insgesamt wurde also folgende Funktion verwendet.

$$p(v_r) \;=\; p_1 \exp\left(-p_2 v_r^2\right) \;;\; v_r \le -2,5 \qquad (5.7)$$

$$p(v_r) \;=\; \sum_{i=1}^{3} p_{3i} \exp\left(-p_{3i+1}(v_r - p_{3i+2})^2\right) \;;\; -2,5 < v_r < 2,5 \qquad (5.8)$$

$$p(v_r) \;=\; p_{12} \exp\left(-p_{13} v_r^2\right) \;;\; v_r \ge 2,5. \qquad (5.9)$$

$$(5.10)$$

Wie Abbildung 5.20 zeigt, beschreibt diese Funktion die Startverteilung sehr gut.[5] Mit der so gefundenen Startverteilung, die bei einer Längenskala r am oberen Ende des Doppelhöcker-Bereiches der Inkrementverteilungen liegt, kann nun die nummerische Iteration über diesen Bereich hinweg zu kleinen

[5] Die Zahlenwerte der Parameter sind nur für die Berechnungen von Interesse und seien hier nicht explizit aufgeführt.

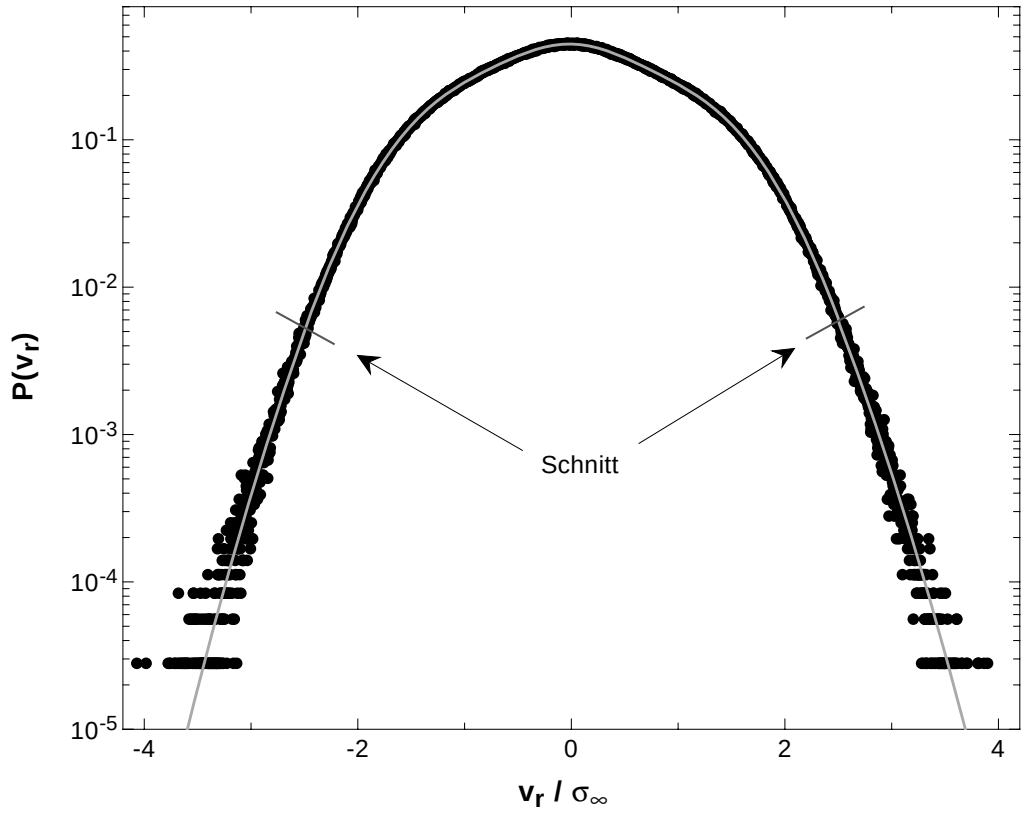


Abbildung 5.20: Startverteilung bei $r = 82,6\,mm$ für die Lösung der Fokker-Planck-Gleichung mit funktionaler Anpassung für die Nummerik.

Längenskalen durchgeführt werden. Abbildung 5.21 zeigt die Ergebnisse der nummerischen Integration der Fokker-Planck-Gleichung mit den im vorigen Abschnitt dargestellten Kramers-Moyal-Koeffizienten (durchgezogene Linien). Zum Vergleich sind die direkt aus den experimentellen Daten gewonnenen Wahrscheinlichkeitsverteilungen (der Inkremente) für die entsprechende Längenskala mit eingezeichnet. Es zeigt sich eine ausgezeichnete Übereinstimmung der nummerischen Lösung mit den experimentell gewonnenen Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Erst bei der kleinsten dargestellten Längenskala sind Abweichungen in den äußeren Bereichen $v_r > 2\sigma_\infty$ (wobei σ_∞ hier ca. $1,7\sigma$ entspricht) zu beobachten. Minimalste Abweichungen sind zudem bei sehr hoher Vergrößerung direkt im Maximum zu beobachten. Diese Abweichungen sind in kleinen Fehlern bei der Bestimmung von D_1 und D_2, die sich durch die Rechnung über die große Distanz hinweg vervielfachen, begründet. Dieses Problem wurde auch bei der Untersuchung isotroper Turbulenz in einem Freistrahl beobachtet [54].

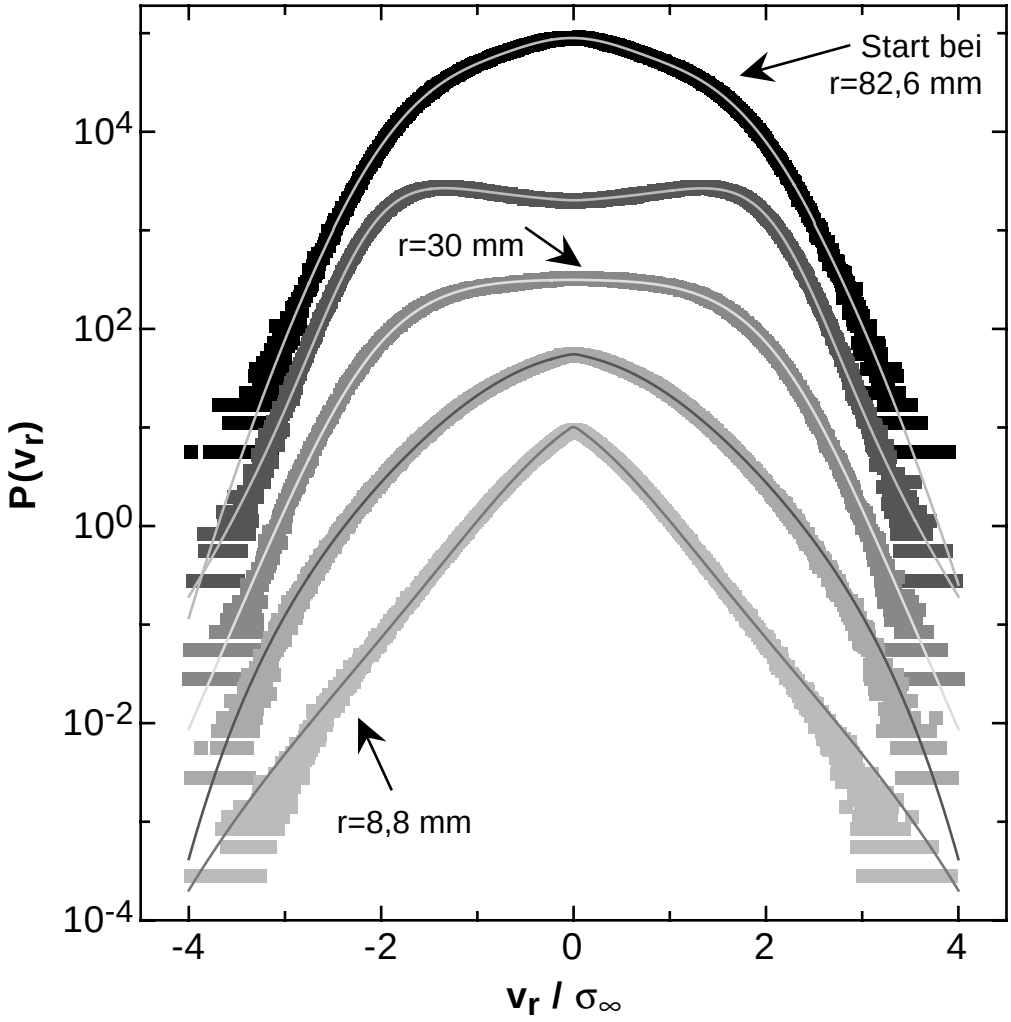


Abbildung 5.21: Nummerische Lösung der Fokker-Planck-Gleichung mit den Kramers-Moyal-Koeffizienten des vorigen Abschnitts (durchgezogene Linien) und die Verteilungen direkt aus dem Experiment. Die Verteilungen sind der Übersichtlichkeit halber vertikal verschoben.

Dies ist ein sehr erfreuliches Ergebnis und zeigt, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der noch nicht voll entwickelten Strömung hinter dem Zylinder über einen weiten Längenskalenbereich hinweg ($2,5\lambda < r < 22\lambda$) durch eine Fokker-Planck-Gleichung mit den oben gezeigten Drift- und Diffusionskoeffizienten sehr gut beschrieben werden kann. Besonders bemerkenswert ist die Tatsache, dass die gezeigten strukturellen Änderungen der Verteilungen (Auftreten und Verschwinden der Doppelhöckerstruktur) exakt reproduziert werden können.

Eine vollständige Beschreibung des stochastischen Prozesses beinhaltet zusätzlich die mehrfach bedingten Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Diese werden jedoch über eine numerische Integration der Fokker-Planck-Gleichung

für die bedingeten Wahrscheinlichkeiten mit den oben ermittelten Drift- und Diffusionskoeffizienten noch nicht korrekt bestimmt. Wahrscheinlich muss hierfür eine erweiterte Beschreibung durch die Hinzunahme einer zusätzlichen unabhängigen Variablen erfolgen. Möglicherweise sind auch bei der Bestimmung der bedingten Wahrscheinlichkeitsverteilungen die Koeffizienten höherer Ordnung nicht mehr zu vernachlässigen. Ebenfalls ist es denkbar, dass kleine Fehler in der Bestimmung von D_1 und D_2 dort einen stärkeren Einfluss haben. Eine genaue Untersuchung der Ursachen steht noch aus. Die erhaltene korrekte Beschreibung der Einpunktwahrscheinlichkeiten ist dennoch ein großer Fortschritt zur Beschreibung der noch nicht entwickelten Turbulenz, die über die Ergebnisse, die mit anderen Methoden der Turbulenzanalyse (z. B. Momentenanalyse) möglich sind, hinaus geht. Auf der Grundlage dieses Ergebnisses kann nun weitergehend die Entwicklung der Turbulenz hinter dem Zylinder hin zur bereits recht gut bekannten voll entwickelten Strömungsform untersucht werden.

5.8 Zerfall der Karmanschen Wirbel mit zunehmender Entfernung vom Zylinder

Die Strömung hinter dem Zylinder zeigt, wie schon in Abschnitt 3 anhand einer Visualisierung erläutert, für große Entfernungen hinter dem Zylinder ein gänzlich anderes Verhalten, als dicht dahinter. Die sich am Zylinder unregelmäßig ablösenden Wirbel zerfallen aufgrund von intrinsischen Instabilitäten und mit zunehmendem Abstand bildet sich die turbulente Kaskade immer mehr heraus. Die Turbulenz entwickelt sich. Erst in dieser vollentwickelten Turbulenz sind die Bedingungen für die in Kapitel 2 vorgestellten Beschreibungsmethoden (Momentenanalyse und ESS, sowie Castaing-Analyse) annähernd erfüllt, womit sich eben diese *Entwicklung* zum vollentwickelten Zustand mit diesen Methoden nicht beschreiben lässt.

In den vorangegangenen Abschnitten wurde die Auswertung einer Messung in geringer Entfernung $X = 10\,D$ vom Zylinder (Durchmesser: $D = 2\,cm$) vorgestellt. Zunächst wurde gezeigt, dass die Methode der Momentenanalyse, sowie die Beschreibung nach Castaing in dieser noch nicht voll entwickelten Strömung nicht anwendbar sind. Danach wurden die Kramers-Moyal-Koeffizienten ermittelt und gezeigt, dass mit ihnen die Verteilungen des vorliegenden stochastischen Prozesses auch für die Strömung nahe des Zylinders adäquat beschrieben werden kann. Mit der Analyse der Kramers-Moyal-Koeffizienten steht damit ein Werkzeug zur Verfügung, um nun auch die Entwicklung der Strömung hinter dem Zylinder von geringem Abstand $X = 10\,D$ hin zu großer Entfernung $X = 100\,D$ zu untersuchen. So wurde

diese zuvor für $X = 10\,D$ dargestellte Analyse nun für weitere Messungen in den Entfernungen $X = 20, .., 100\ D$ durchgeführt. Im Folgenden sollen die für die Beschreibung des Übergangs zur vollentwickelten Turbulenz wichtigen Ergebnisse dargestellt werden.

Die wohl markanteste Änderung bei zunehmendem Abstand vom Zylinder ist das Verschwinden der Doppelhöcker-Struktur der Inkrement-Verteilungen für alle Längenskalen (vgl. dazu Abb. 3.22 und 5.6). Dies ist dadurch erklärbar, dass sich die turbulente Kaskade immer besser ausbildet und damit dem Idealfall der vollentwickelten isotropen Turbulenz näher kommt (vgl. Abschnitt 3.3). Die unmittelbar hinter dem Zylinder entstehenden Karmanschen-Wirbel zerfallen mit zunehmendem Abstand wieder. Wie oben gesehen, werden die Karman-Wirbel in der Statistik der Inkrement-Verteilungen durch eine doppelhöckrige Struktur wiedergegeben. Der Doppelhöcker-Struktur in den Verteilungen liegt ein stochastischer Prozess zugrunde, der durch ein s-förmiges Verhalten des Drift-Koeffizienten D_1, sowie eine Doppelmuldenform des Diffusionskoeffizienten D_2 gegeben ist. Wie nun das Abnehmen der Karmanschen Wirbel mit zunehmendem Abstand stattfindet, kann demnach über diese Größen $D_1(v_r, r, X)$ und $D_2(v_r, r, X)$, die jetzt also zusätzlich noch von dem Abstand X abhängen, erfasst werden.

Es wurden demnach die Kramers-Moyal-Koeffizienten D_1 und D_2 für verschiedene Abstände X bestimmt. Wie zuvor (in den Abbildungen 5.14, bzw. 5.17) sollen nun als Überblick D_1, bzw. D_2 3-dimensional dargestellt werden. Dazu muss jetzt die Längenskala r festgehalten werden. Dazu eignet sich eine Längenskala, bei der sich die Karman-Wirbel am deutlichsten zeigen, besonders. Dort ist die s-Form in D_1 am stärksten ausgeprägt. Die folgende Abbildung 5.22 zeigt $D_1(v_r, X)$ und $D_2(v_r, X)$ der Vertikal-Komponente der Geschwindigkeit für die Abstände von 10 bis 100 D bei einer Längenskala von $r = 71\,mm$.

Für D_1 ist in Teil a) ein mit dem Verhalten bei Variation der Längenskala r (s. Abb. 5.14) vergleichbarer Verlauf zu beobachten. Der s-förmige Verlauf von D_1 verändert sich unter Vergrößerung des Abstandes vom Zylinder kontinuierlich in einen linearen Verlauf mit negativer Steigung. Damit kann auch die zuvor gefundene Parameteranpassung für alle Abstände angewandt werden.

Das Verhalten von D_2 mit zunehmendem Abstand unterscheidet sich dagegen stärker zum Fall bei Variation der Längenskala. Zwar ändert sich D_2 wie zuvor (siehe obige Abbildung 5.17) kontinuierlich von einem Doppelmulden-Verlauf zu einem sehr flachen Verlauf mit einem Minimum, jedoch ist bei einem Abstand von etwa $45\,D$ ein Maximum des Offsets zu beobachten (in Abbildung 5.22 durch den Pfeil angedeutet). In diesem Maximum besitzt D_2 gerade eben keine Doppelmulden-Form mehr. Verglichen mit D_1 ist in D_2

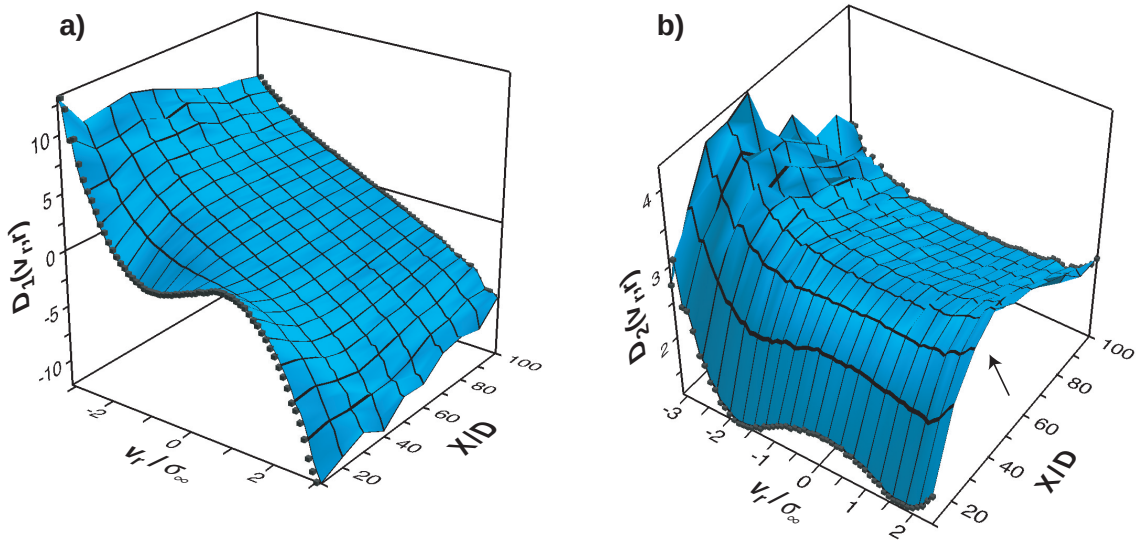


Abbildung 5.22: Die ersten beiden Kramers-Moyal-Koeffizienten $D_1(v_r, X)$ (a) und $D_2(v_r, X)$ (b) für die Abstände von 10 bis 100 D hinter dem Zylinder ($D = 2\,cm$) bei einer Längenskala von $r = 71\,mm$.

wiederum[6] der Einfluss der Karman-Wirbel bezogen auf die Variable (hier X) länger zu beobachten. In D_1 ist schon in einer Entfernung von $20\,D$ nur noch eine Nullstelle in $v_r = 0$ vorhanden, während in D_2 erst ab $40\,D$ die Doppelmulden-Form verschwindet. Es zeigt sich also erneut, dass der Koeffizient D_2 das Auftreten[7] der strukturellen Änderung (hier: die Karman-Wirbel) schon anzeigt, bevor es sich im deterministischen Anteil, der durch D_1 gegeben ist, manifestiert.

Desweiteren ist in Abbildung 5.22 b) zu beobachten, dass der konstante Offset von D_2 für kleine Abstände, in denen die Karman-Wirbel voll ausgeprägt sind, klein ist, dann genau bei Verschwinden der Doppelmulden-Struktur maximal wird und danach linear abnimmt. Die Erklärung kann hier wieder über die Stabilitätsbetrachtung der Strukturänderung (Bifurkation) gegeben werden. Der stark attrahierende Zustand der Karman-Wirbel unterdrückt den stochastischen Anteil (kleiner Offset in D_2). Beim Zerfallen der Wirbelstrukturen geht die attrahierende Wirkung immer weiter zurück, bis sie schließlich im Punkt des Strukturwechsels verschwindet. Damit steigt der Offset in D_2 bis dahin an. Der lineare Abfall des Offsets im weiteren Verlauf ($X > 40\,D$) kann

[6] verglichen mit dem Fall der Längenskalenabhängigkeit der Kramers-Moyal-Koeffizienten in den vorhergehenden Abschnitten

[7] jetzt vom Idealzustand der vollentwickelten Turbulenz in großem Abstand vom Zylinder aus gesehen

über den Zerfall der Turbulenz bei einer Nachlaufströmung erklärt werden.

Mit der Längenskala r und dem Abstand X vom Zylinder kennzeichnen also zwei Parameter die strukturelle Änderung der Strömungsverhältnisse, die sich in den Kramers-Moyal-Koeffizienten D_1 und D_2 widerspiegeln. Ein s-förmiges Verhalten in D_1 entspricht einer doppelhöckrigen Struktur in der Inkrement-Verteilung, die wiederum von den Karman-Wirbeln herrühren. Diese s-förmige Struktur wird durch den Koeffizienten a_1 der Anpassungsfunktion an D_1 (s. Gl. (5.4)) gegeben. Wenn der Koeffizient a_1 positiv wird, besitzt D_1 eben diese s-förmige Struktur (siehe auch Abbildung 5.15), die das Vorhandensein der kohärenten Wirbelstrukturen anzeigt.

Trägt man den Wert dieses Koeffizienten a_1 nun in Abhängigkeit von den beiden Parametern r und X, von denen er abhängt, in einem Konturdiagramm auf, so erhält man ein Phasendiagramm, das das strukturelle Verhalten der Strömung hinter dem Zylinder wiedergibt. Ein solches Phasendiagramm zeigt Abbildung 5.23.

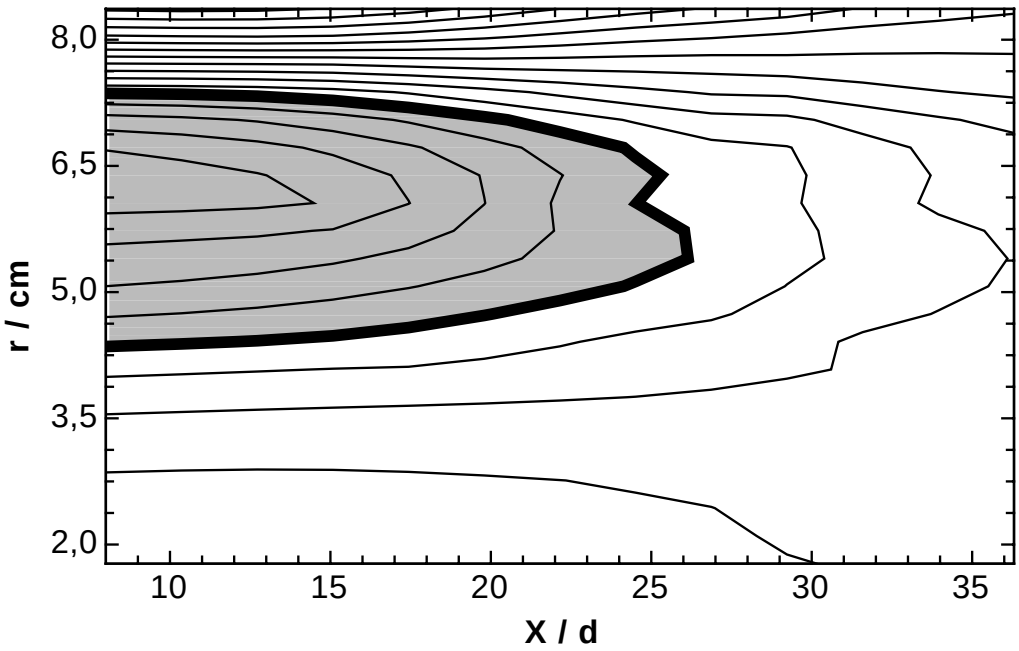


Abbildung 5.23: Phasendiagramm für den Übergang zur voll entwickelten Turbulenz einer Zylinder-Nachlaufströmung ($D = 5\,cm$). Dargestellt sind Höhenlinien des Anpassungs-Parameters a_1 aus Gleichung (5.4) in Abhängigkeit von der Längenskala r, sowie dem Abstand X. Die fette Linie kennzeichnet a_1=0 und der graue Bereich markiert den Bereich positiver Werte für a_1.

Der in dieser Abbildung grau markierte Bereich in dem von r und X aufgespannten Phasenraum entspricht positiven Werten von a_1 und damit dem Auftreten von kohärenten Wirbelstrukturen. Mit zunehmendem Abstand X

vom Zylinder wird dieser Bereich bezogen auf die Längenskala r schmaler. Ab $X = 26\,D$ ist a_1 negativ und damit der Verlauf von D_1 monoton fallend. Die zwei getrennten stabilen Fixpunkte sind also zusammengefallen. Es herrschen keine kohärenten Wirbelstrukturen mehr. Es sei noch erwähnt, dass sich für größere Längenskalen r, als in Abbildung 5.23 dargestellt, der Bereich positiver Parameter a_1 wiederholt, was durch die Periodizität im Verlauf von a_1 (siehe Abbildung 5.15), der durch die nahezu periodisch auftretenden Wirbel gegeben ist, erklärt werden kann.

In dieser Phasendiagramm-Darstellung ist also in kompakter Weise ersichtlich, wo der sich im deterministischen Anteil D_1 des stochastischen Turbulenzprozesses in der Kaskade zeigende Zerfall der Wirbelstrukturen mit zunehmendem Abstand vom Zylinder erfolgt. Zusätzlich ist erkennbar, dass bei kleinen Längenskalen unterhalb von etwa 4 cm für alle Abstände X keine kohärenten Wirbelstrukturen auftreten.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass es gelungen ist über die Analyse des ersten Kramers-Moyal-Koeffizienten, der den deterministischen Anteil wiedergibt, den Zerfall der Wirbelstrukturen im Nahfeld hinter einem Zylinder zu beschreiben. Das Phasendiagramm des Koeffizienten a_1 gibt eine Übersicht über das Auftreten der Wirbel in Abhängigkeit der zwei zentralen Parameter Längenskala r und Abstand X vom Zylinder.

Kapitel 6

Zusammenfassung und Ausblick

Ausgehend von einer allgemeinen Betrachtung der Probleme und Fragestellungen bei der Untersuchung turbulenter Strömungen und der Darstellung der grundlegenden Modelle und Methoden der statistischen Beschreibung turbulenter Phänomene wurden aktuelle Fragestellungen der Turbulenzforschung diskutiert. Es wurden die experimentellen Bedingungen der durchgeführten Messungen der Gitter- und der Zylindernachlaufströmung, sowie deren Strömungsform beschrieben. Die Güte der aufgenommenen Messreihen wurde über die Bestimmung charakteristischer Größen der Turbulenz sowie durch Vergleiche dieser Größen mit Messungen anderer Forschergruppen verifiziert. Es steht damit eine Vielzahl gut charakterisierter und verifizierter Datenreihen dieser beiden Strömungsformen unter verschiedenen Bedingungen zur Verfügung.

Es folgte die exemplarische Darstellung der Auswertungen dieser Datenreihen zunächst mit den in der Turbulenzforschung bekannten Methoden der Momentenanalyse sowie der Analyse nach Castaing. Dies diente zum einen einer weiteren Validierung der Datensätze und zum anderen wurde die aktuelle Frage der Statistik der einzelnen *Komponenten* des Geschwindigkeitsvektors für die Strömungsformen, die der idealen Turbulenz am nächsten kamen, genauer untersucht. Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Inkremente der longitudinalen Komponente sind asymmetrisch, während die Verteilungen der Inkremente der anderen Komponenten symmetrisch sind. Die Auswertungen mittels der ESS-Methode und der Castaingschen Anpassung ergaben vergleichbare Resultate. Vergleiche mit Untersuchungen weiterer Strömungsformen durch andere Forschergruppen zeigten kleine Unterschiede in den Zahlenwerten der Skalenexponenten, wobei jedoch das prinzipielle Verhalten vergleichbar war. So ist der Skalenexponent ζ_6 bzw. der Intermittenzfaktor bei den transversalen Komponenten kleiner als bei der longitudinalen Komponente. Damit ist umgekehrt die Intermittenz der transversalen Komponenten größer. Desweiteren wurde auf die prinzipiellen Probleme dieser herkömmlichen Auswerteverfahren eingegangen, die in deren Voraussetzungen bezüglich der Strömungsei-

genschaften begründet sind. Es wird hierbei eine möglichst ideale, vollständig entwickelte, homogene und isotrope Strömung mit sehr hoher Reynoldszahl benötigt, die in der Realität nicht vorliegt. Auch Laborströmungen können diese Eigenschaften nur unzureichend erfüllen.

Besondere Bedeutung gewinnt dies bei der Frage nach nicht idealen Strömungen, die eigentlich der Normalfall in der Natur sind. Dort gelten die vereinfachenden Annahmen der idealen Turbulenz nicht mehr. Hier treten Scherungen auf, die Anisotropien des Geschwindigkeitsfeldes zur Folge haben. Diese zusätzlichen Effekte der zu beschreibenden Strömungen stellen eine neue Herausforderung an die Modellbildung, sowie die mathematische Beschreibung der Strömung dar. Es wurde gezeigt, wo die Methoden und Konzepte der Turbulenzforschung, die, wenn auch mit Einschränkungen, im Fall einer isotropen Strömung durchaus schlüssige Ergebnisse lieferten (z.B. ESS, Log-Normal-Modell), im Fall von nicht idealen Strömungen versagen. Daher mussten neue Beschreibungsweisen herangezogen werden. Die stochastische Beschreibung über eine Fokker-Planck-Gleichung oder ihrer Erweiterung durch die Kramers-Moyal-Expansion bietet dabei den vielversprechensten Ansatz, da dort keine a priori Voraussetzungen an die Strömungsbeschaffenheit gemacht werden müssen.

Zunächst wurde diese neuartige Markov-Analyse auf die Messdaten in den nahezu isotropen Strömungsformen eingesetzt. Die Gitter- und Zylinderströmungen wurden hier zu ersten Mal mit Hilfe der Markov-Analyse untersucht. Ebenfalls wurde diese Analyse erstmalig für die verschiedenen Komponenten des Geschwindigkeitsvektors durchgeführt. Dabei zeigte sich ein zu den vorigen herkömmlichen Untersuchungen konsistentes Bild. Als neue Ergebnisse ergaben sich dabei folgende Erkenntnisse. Die Asymmetrie der Longitudinalkomponente wird durch das asymmetrische Rauschen, das durch den zweiten Kramers-Moyal-Koeffizienten wiedergegeben wird, verursacht. Ebenfalls sind die ermittelten Unterschiede in der Intermittenz im wesentlichen auf diesen unterschiedlichen Rauschterm zurückzuführen.

Desweiteren konnte eine Fragestellung innerhalb dieser neuen Analysemethode geklärt werden. Es stellte sich heraus, dass die Markov-Kohärenzlänge in direktem Verhältnis zur bekannten Taylorlänge steht. Die abstrakte, durch das Verfahren gegebene Größe der unteren Kohärenzlänge ist so in Bezug zu einer physikalischen Größe, der Taylorlänge, gesetzt worden. Damit konnte ein Beitrag zur physikalischen Interpretation der stochastischen Modellierung durch Markov-Prozesse geleistet werden.

Im Anschluss an die Untersuchung der nahezu isotropen Strömungen hinter dem Gitter und in großer Entfernung hinter dem Zylinder wurde das Nahfeld hinter dem Zylinder untersucht. In diesem Bereich der Nachlaufströmung ist die Turbulenz noch nicht voll entwickelt. Es treten kohärente Wirbelstrukturen auf und die Strömung ist nicht mehr homogen und isotrop. Die Voraus-

setzungen für die herkömmlichen Auswerteverfahren, wie beispielsweise die Momentenanalyse, sind also hier nicht gegeben. Es wurde gezeigt, wo diese Verfahren im Nahfeld des Zylindernachlaufs an ihre Grenzen stoßen.

Im Anschluss daran wurde das Verfahren der Markov-Analyse auf diese Strömungsform angewandt. Dabei zeigte sich, dass die Markov-Eigenschaften sowohl bei den kleinen als auch bei den großen Längenskalen im Bereich der Wirbelstrukturen erfüllt sind. In den Zwischenbereichen zeigten sich allerdings Probleme, die darauf hinweisen, dass erst eine mehrdimensionale Beschreibung den stochastischen Prozess vollständig erfasst. Es konnte jedoch über den Vergleich der Lösung der Fokker-Planck-Gleichung mit den gemessenen Inkrementverteilungen gezeigt werden, dass auch über eine eindimensionale Analyse eine Modellierung der Statistik der Geschwindigkeitsinkremente möglich ist. Die Simulation zeigt die korrekte Wiedergabe der Veränderung der Inkrementstatistik ausgehend von den kleinen Längenskalen von etwa 3λ bis hin zu den großen Längenskalen der kohärenten Wirbel und darüber hinaus. Die Kramers-Moyal-Koeffizienten liefern also eine effektive Beschreibung der Inkrementstatistik und den Zusammenhang zwischen den Längenskalen.

Unter diesen Voraussetzungen wurden die im Nahfeld des Zylindernachlaufs ermittelten Kramers-Moyal-Koeffizienten näher untersucht. Es konnten Parametrisierungen gefunden werden, die eine kontinuierliche Charakterisierung des gesamten Nahfeldes zulassen. Die Untersuchung des deterministischen Anteils, der durch den ersten Kramers-Moyal-Koeffizienten D_1 beschrieben wird, zeigt die Bereiche des Auftretens bzw. Verschwindens der Wirbelstrukturen bei unterschiedlicher Längenskala sowie bei verschiedenem Abstand des Sensors hinter dem Zylinder. Die Strukturänderung der Strömung von nahezu periodischem Verhalten bis hin zu irregulärem Verhalten der vollentwickelten Turbulenz wird durch die Kramers-Moyal-Koeffizienten korrekt wiedergegeben. Man hat damit eine Beschreibung dieses Phänomens der zerfallenden Ordnung. In einem Phasendiagramm kann das Verschwinden der kohärenten Wirbelstrukturen mit zunehmendem Abstand X vom Zylinder, sowie das Vorhandensein bzw. Nicht-Vorhandensein dieser bei unterschiedlichen Längenskalen r übersichtlich dargestellt werden.

Das Erkennen und Charakterisieren kohärenter Strukturen ist ein aktueller Forschungsgegenstand, wie zum Beispiel die Zusammenschau verschiedener aktuell diskutierter Methoden in [13] oder auch die Arbeit von Camussi und Guj über die Analyse Kohärenter Strukturen im Nahfeld eines Freistrahls mittels Wavelet-Zerlegung [19] zeigt. Zu diesem Themengebiet liefert die vorliegende Arbeit einen neuen Beitrag, da die Markov-Analyse hier bislang noch nicht verwendet wurde. Es ist hier erstmals eine einheitliche statistische Beschreibung der Inkrementverteilungen bei einem Übergang in die voll entwickelte Turbulenz gelungen, die zuvor durch die intrinsischen limitierenden Voraussetzungen der zur Verfügung stehenden Beschreibungsmethoden nicht möglich

war.

Da in dieser Arbeit erstmals versucht wurde, die in der isotropen Turbulenz erfolgreiche Markov-Analyse zur Auswertung turbulenter Messdaten auch auf nicht ideale Strömungen anzuwenden, gibt es noch ein weites Betätigungsfeld, um diese Ausweitung zu verfeinern und auf weitere Strömungsformen anzuwenden. Zunächst gilt es die Probleme mit der Markov-Eigenschaft in gewissen Längenskalenbereichen zu beheben. Dazu ist eine mehrdimensionale Beschreibung notwendig. Inzwischen sind dazu die Voraussetzungen geschaffen [7]. Mit einer solchen mehrdimensionalen Analyse sollte es möglich sein, den stochastischen Prozess vollständig zu erfassen.

Desweiteren ist eine mögliche Anwendung der hier gefundenen Ergebnisse auf die Modellierung turbulenter Strömungen zu nennen. Ein verbreitetes Verfahren zur numerischen Berechnung turbulenter Strömungen ist die Large-Eddy-Simulation (LES). Hier wird die Strömung auf den großen Skalen numerisch berechnet. Allerdings müssen für die kleinskalige Turbulenz Modellannahmen gemacht werden. Diese Modellannahmen können nun mit den hier gewonnenen Ergebnissen über das Wechselspiel von den kleinen und den großen Skalen präzisiert werden.

Von theoretischer Seite gilt zu klären, wie die Beschreibung der turbulenten Kaskade durch einen Markov-Prozess mit den Grundgleichungen der Strömung in Verbindung zu setzen ist, bzw. wie groß der Gültigkeitsbereich einer solchen Beschreibung sein kann.

Bezüglich der Nachlaufströmung eines Zylinders ist die Frage der Beschreibung der Randbereiche dieser Strömung noch ungeklärt. Auch dieses ist eine Strömungsform, die mit den herkömmlichen Methoden nicht zugänglich ist. Es gilt zu testen, ob auch in einem solchen Fall die Markov-Analyse eine Beschreibung zulässt.

Ganz allgemein eröffnet nun die Möglichkeit der Beschreibung von nicht idealer Turbulenz eine Vielzahl von Anwendungen auf weitere Strömungsformen und damit eventuell einer späteren Anwendung auf technische bzw. reale Strömungen.

Anhang

Tabellarische Zusammenstellung der wichtigsten Parameter und Kenngrößen der Messreihen

Messreihe	Experiment	Position	V_flow [m/s]	V_min [m/s]	V_max [m/s]	<V> [m/s]	σ [m/s]	T.Int. [%]	η [mm]	λ [mm]	L [cm]	Re	Rlam
GSGE_01	Gitter 5 cm	X=1600 mm	1,74	1,50	1,97	1,74	0,05	3,09	0,81	9,16	12,09	6250	33
GSGE_02	Gitter 5 cm	X=1600 mm	3,29	2,77	3,77	3,29	0,11	3,40	0,48	6,65	12,56	11802	49
GSGE_03	Gitter 5 cm	X=1600 mm	5,34	4,59	6,19	5,34	0,19	3,54	0,33	5,38	2,89	19189	67
GSGE_04	Gitter 5 cm	X=1600 mm	6,63	5,65	7,63	6,63	0,24	3,57	0,28	4,88	3,76	23805	64
GSGE_05	Gitter 5 cm	X=1600 mm	9,27	7,72	10,76	9,27	0,34	3,67	0,22	4,31	2,45	33294	97
GSGE_06	Gitter 5 cm	X=1600 mm	10,63	8,84	12,35	10,63	0,39	3,69	0,20	4,06	3,72	38166	97
GSGE_07	Gitter 5 cm	X=1600 mm	12,94	10,96	15,08	12,94	0,47	3,61	0,17	3,60	2,75	46486	99
GSGE_08	Gitter 5 cm	X=1600 mm	13,94	11,69	16,26	13,94	0,50	3,60	0,16	3,47	2,87	50052	115
GSGE_09	Gitter 5 cm	X=1600 mm	15,66	13,36	18,16	15,66	0,55	3,49	0,15	3,33	3,33	56250	112
GSGE_10	Gitter 5 cm	X=1600 mm	17,26	14,74	19,92	17,26	0,60	3,46	0,14	3,07	3,18	61989	113
GSGE_11	Gitter 5 cm	X=1600 mm	18,91	16,01	21,92	18,91	0,67	3,53	0,13	3,02	3,46	67907	133
GSGE_12	Gitter 5 cm	X=1600 mm	20,82	17,78	24,26	20,82	0,73	3,49	0,12	2,90	2,83	74766	131
GSGE_13	Gitter 5 cm	X=1600 mm	22,08	18,64	25,62	22,08	0,76	3,46	0,12	2,82	2,81	79295	135
GSGE_14	Gitter 5 cm	X=1600 mm	23,54	20,10	27,08	23,54	0,82	3,47	0,11	2,76	3,02	84558	133
GSGE_15	Gitter 5 cm	X=1600 mm	24,65	20,63	28,52	24,65	0,85	3,45	0,11	2,59	3,92	88530	130
GIX_01V_1	Gitter 5 cm	X=1600 mm	19,34	16,24	22,58	19,34	0,66	3,39	0,11	2,19	7,86	69469	83
GIX_01V_2	Gitter 5 cm	X=1600 mm	19,34	-8,11	-1,29	-4,83	0,61	3,17	0,10	1,47	1,13		
GIX_01W_1	Gitter 5 cm	X=1600 mm	18,98	15,63	22,25	18,98	0,64	3,36	0,12	2,21	4,48	68185	81
GIX_01W_2	Gitter 5 cm	X=1600 mm	18,98	-8,23	-1,58	-5,05	0,61	3,22	0,10	1,52	0,87		

Abbildung 6.1: Tabelle der experimentellen Gegebenheiten und zentralen Kenngrößen der Messreihen 'GSGE' und 'GIX' der Gitterströmung.

Messreihe	Experiment	Position	V_flow [m/s]	V_min [m/s]	V_max [m/s]	<V> [m/s]	σ [m/s]	T.Int. [%]	η [mm]	λ [mm]	L [cm]	Re	Rlam
GZYL01_1	Zylinder 5 cm	2.0 m = 40 D	18,01	10,59	27,97	18,01	1,66	9,19	0,09	3,51	18,30	64681	384
GZYL01_2	Zylinder 5 cm	2.0 m = 40 D	18,01	-8,99	7,88	-0,03	1,53	8,50	0,08	2,55	1,43	64681	258
GZYL02_1	Zylinder 5 cm	2.0 m = 40 D	26,65	14,95	39,92	26,65	2,48	9,31	0,06	2,34	16,68	95725	385
GZYL02_2	Zylinder 5 cm	2.0 m = 40 D	26,65	-13,26	11,15	0,24	2,31	8,65	0,06	1,90	1,29	95725	259
ZYLAB01V_1	Zylinder 5 cm	2.0 m = 40 D	23,54	14,28	34,51	23,54	2,13	9,06	0,08	3,87	15,46	84560	551
ZYLAB01V_2	Zylinder 5 cm	2.0 m = 40 D	23,54	-8,73	9,97	0,19	1,97	8,37					
ZYLAB02V_1	Zylinder 5 cm	1.6 m = 32 D	23,60	12,21	36,04	23,60	2,48	10,50	0,08	3,58	14,82	84763	587
ZYLAB02V_2	Zylinder 5 cm	1.6 m = 32 D	23,60	-11,66	10,99	-0,28	2,39	10,12					
ZYLAB03V_1	Zylinder 5 cm	0.8 m = 16 D	21,69	4,02	43,01	21,69	3,81	17,55	0,06	3,06	12,19	77894	777
ZYLAB03V_2	Zylinder 5 cm	0.8 m = 16 D	21,69	-14,39	23,47	4,14	4,33	19,96					
ZYLAB04V_1	Zylinder 5 cm	0.4 m = 8 D	20,68	1,79	51,73	20,68	5,06	24,48	0,04	2,61	10,50	74260	877
ZYLAB04V_2	Zylinder 5 cm	0.4 m = 8 D	20,68	-23,63	24,22	-0,12	6,82	32,98					
ZYLAB05V_1	Zylinder 5 cm	0.2 m = 4 D	20,97	1,48	57,52	20,97	5,84	27,83	0,04	2,11	7,16	75317	819
ZYLAB05V_2	Zylinder 5 cm	0.2 m = 4 D	20,97	-28,87	30,69	0,27	9,23	44,00					
ZYLAB06V_1	Zylinder 5 cm	0.1 m = 2 D	20,80	1,40	70,80	20,80	5,98	28,75	0,03	1,62	2,78	74721	641
ZYLAB06V_2	Zylinder 5 cm	0.1 m = 2 D	20,80	-31,42	32,56	0,84	10,81	51,94					
AusX10_1	Zylinder 2 cm	0.2 m = 10 D	12,29	1,43	30,30	12,29	2,93	23,85	0,05	1,68	9,10	17652	326
AusX10_2	Zylinder 2 cm	0.2 m = 10 D	12,29	-16,75	15,92	0,06	3,93	31,95	0,04	1,72	0,23	17652	398
AusX10a_1	Zylinder 2 cm	0.3 m = 15 D	12,52	2,08	27,70	12,52	2,46	19,68	0,06	1,92	10,02	17994	265
AusX10a_2	Zylinder 2 cm	0.3 m = 15 D	12,52	-13,41	14,71	0,03	2,86	22,81	0,04	1,17	0,33	17994	197
AusX11_1	Zylinder 2 cm	0.4 m = 20 D	12,83	3,42	27,77	12,83	2,11	16,44	0,06	2,13	10,88	18435	266
AusX11_2	Zylinder 2 cm	0.4 m = 20 D	12,83	-11,65	12,73	0,06	2,23	17,41	0,05	1,27	0,38	18435	163
AusX11a_1	Zylinder 2 cm	0.5 m = 25 D	12,77	4,64	22,47	12,77	1,83	14,35	0,07	2,35	22,50	18341	269
AusX11a_2	Zylinder 2 cm	0.5 m = 25 D	12,77	-11,72	9,91	-0,08	1,78	13,91	0,05	1,33	0,64	18341	133
AusX12_1	Zylinder 2 cm	0.6 m = 30 D	12,76	5,23	22,81	12,76	1,57	12,27	0,08	2,45	11,50	18333	230
AusX12_2	Zylinder 2 cm	0.6 m = 30 D	12,76	-8,14	9,60	-0,08	1,49	11,65	0,06	1,41	0,54	18333	131
AusX13_1	Zylinder 2 cm	0.8 m = 40 D	13,58	7,33	21,01	13,58	1,32	9,72	0,09	2,90	12,29	19510	229
AusX13_2	Zylinder 2 cm	0.8 m = 40 D	13,58	-6,37	7,65	0,13	1,19	8,76	0,01	0,02	0,01	19510	129
AusX14_1	Zylinder 2 cm	1.0 m = 50 D	13,89	8,85	19,36	13,89	1,13	8,15	0,11	3,29	14,30	19954	230
AusX14_2	Zylinder 2 cm	1.0 m = 50 D	13,89	-5,26	6,42	0,12	0,99	7,12	0,09	1,85	0,81	19954	113
AusX15_1	Zylinder 2 cm	1.2 m = 60 D	14,24	9,49	19,25	14,24	1,01	7,12	0,12	3,70	14,05	20455	224
AusX15_2	Zylinder 2 cm	1.2 m = 60 D	14,24	-4,71	4,90	0,11	0,86	6,06	0,01	0,02	0,01	20455	117
AusX16_1	Zylinder 2 cm	1.4 m = 70 D	14,54	10,59	19,68	14,54	0,92	6,35	0,13	4,07	13,76	20889	224
AusX16_2	Zylinder 2 cm	1.4 m = 70 D	14,54	-4,03	4,37	0,06	0,77	5,32	0,01	0,01	0,00	20889	116
AusX17_1	Zylinder 2 cm	1.6 m = 80 D	14,85	10,84	18,79	14,85	0,87	5,83	0,14	4,51	16,16	21338	258
AusX17_2	Zylinder 2 cm	1.6 m = 80 D	14,85	-3,92	3,85	-0,05	0,71	4,79				21338	
AusX18_1	Zylinder 2 cm	1.8 m = 90 D	15,08	11,70	19,07	15,08	0,81	5,39	0,15	4,87	16,15	21665	262
AusX18_2	Zylinder 2 cm	1.8 m = 90 D	15,08	-4,35	3,68	-0,05	0,66	4,39				21665	
AusX19_1	Zylinder 2 cm	2.0 m = 100 D	15,37	11,91	19,21	15,37	0,78	5,10	0,16	5,32	18,98	22084	260
AusX19_2	Zylinder 2 cm	2.0 m = 100 D	15,37	-4,23	3,23	-0,07	0,63	4,07				22084	
AuspS01	Zylinder 5 cm	2.0 m = 40 D	12,04	7,62	17,34	12,04	1,00	8,33	0,15	5,98	26,45	43235	397
AuspS02	Zylinder 5 cm	2.0 m = 40 D	17,23	10,86	25,48	17,23	1,63	9,43	0,09	3,42	18,34	61891	320
AuspS03	Zylinder 5 cm	2.0 m = 40 D	24,74	13,30	37,50	24,74	2,47	9,97	0,06	2,59	18,29	88854	391
AuspS04	Zylinder 5 cm	2.0 m = 40 D	32,46	18,72	49,42	32,46	3,20	9,86	0,05	2,12	17,47	116589	450
AuspS05	Zylinder 5 cm	2.0 m = 40 D	9,30	5,65	13,31	9,30	0,80	8,63	0,16	4,98	25,11	33403	264
AuspS06	Zylinder 5 cm	2.0 m = 40 D	16,65	8,53	25,00	16,65	1,60	9,60	0,09	3,37	19,77	59794	325
AuspS06a	Zylinder 5 cm	2.0 m = 40 D	16,73	9,38	26,08	16,73	1,59	9,49	0,09	3,34	18,52	60086	335
AuspS07	Zylinder 5 cm	2.0 m = 40 D	25,93	14,54	37,90	25,93	2,59	9,97	0,06	2,73	17,65	93131	451
AuspS08	Zylinder 5 cm	2.0 m = 40 D	34,05	17,99	53,80	34,05	3,46	10,16	0,05	2,28	19,16	122284	522
AuspS09	Zylinder 5 cm	2.0 m = 40 D	38,37	19,18	61,48	38,37	3,98	10,38	0,05	2,35	21,35	137818	524

Abbildung 6.2: Tabelle der experimentellen Gegebenheiten und zentralen Kenngrößen der Messreihen 'GZYL', 'ZYLAB', 'AUSX' und 'AuspS' der Zylinderströmung.

Literaturverzeichnis

[1] P. O. AMBLARD & J. M. BROSSIER. On the cascade in fully developed turbulence. The propagator approach versus the Markovian description. *Eur. Phys. Journal B*, **12**; 579, 1999.

[2] F. ANSELMET, Y. GAGNE, E. J. HOPFINGER & R. A. ANTONIA. High-order structure functions in turbulent shear flows. *J. Fluid Mech.*, **140**; 63, 1984.

[3] R. A. ANTONIA & B. R. PEARSON. Scaling exponents for turbulent velocity and temperature increments. *Europhys. Lett.*, **40**(2); 123, 1997.

[4] R. A. ANTONIA & H. S. SHAFI. Small scale intermittency in a rough wall turbulent boundary layer. *Exp. Fluids*, **26**; 145, 1999.

[5] A. ARNEODO, C. BAUDET, F. BELIN, R. BENZI ET AL. Structure functions in turbulence, in various flow configurations, at Reynolds number between 30 and 5000, using extended self-similarity. *Europhys. Lett.*, **34**(6); 411, 1996.

[6] D. ARONSON & L. LÖFDAHL. The plane wake of a cylinder. Measurements and inferences on the turbulence modelling. *Phys. Fluids A*, (5); 1433, 1993.

[7] ST. BARTH & M. KARTH. *Messungen und Analyse der turbulenten Nachlaufströmung eines Zylinders.* Diplomarbeit, Universität Oldenburg, Arbeitsgruppe Hydrodynamik, in Arbeit.

[8] R. BENZI, L. BIFERALE & F. TOSCHI. Multiscale velocity correlations in turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, **80**; 3244, 1998.

[9] R. BENZI, S. CILIBERTO, C. BAUDET & G. RUIZ-CHAVARRIA. On the scaling of three-dimensional homogeneous and isotropic turbulence. *Physica D*, **80**; 385, 1995.

[10] R. BENZI, S. CILIBERTO, C. BAUDET, G. RUIZ-CHAVARRIA & R. TRIPICCIONE. Extended self-similarity in the dissipation range of fully developed turbulence. *Europhys. Lett.*, **24**(4); 275, 1993.

[11] R. BENZI, S. CILIBERTO, R. TRIPICCIONE, C. BAUDET, F. MASSAIOLI & S. SUCCI. Extended self-similarity in turbulent flows. *Phys. Rev. E*, **48**(1); R29, 1993.

[12] R. BENZI, G. PALADIN, G. PARISI & A. VULPIANI. On the multifractal nature of fully developed turbulence and chaotic systems. *J. Phys. A*, **17**; 3521, 1984.

[13] J. P. BONNET, J. DELVILLE, M. N. GLAUSER, R. A. ANTONIA, D. K. BISSET, D. R. COLE, H. E. FIEDLER, J. H. GAREM, D. HILBERG, J. JEONG, N. K. R. KEVLAHAN, L. S. UKEILEY & E. VINCENDEAU. Collaborative testing of eddy structure identification methods in free turbulent shear flows. *Exp. Fluids*, **25**; 197, 1998.

[14] P. BRADSHAW. *An introduction to turbulence and its measurement.* Pergamon Press, 1971.

[15] P. BRADSHAW. *Turbulence*. Springer, New York, 1976.

[16] I. N. BRONSTEIN & K. A. SEMENDJAJEW. *Taschenbuch der Mathematik*. Teubner, Stuttgart, 1991.

[17] B. CABAUD, A. NAERT, J. PEINKE, F. CHILLA, B. CASTAING & B. HEBRAL. Transition toward developed turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, **73**(24); 3227, 1994.

[18] C. CAMBON & J. F. SCOTT. Linear and nonlinear models of anisotropic turbulence. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **31**; 1, 1999.

[19] R. CAMUSSI & G. GUJ. Experimental analysis of intermittend coherent structures in the near field of a high Re turbulent jet flow. *Phys. Fluids*, **11**(2); 423, 1999.

[20] B. CASTAING, Y. GAGNE & E. J. HOPFINGER. Velocity probability density functions of high reynolds number turbulence. *Physica D*, **46**; 177, 1990.

[21] J. R. CHASNOV. On the decay of inhomogeneous turbulence. *J. Fluid Mech.*, **342**; 335, 1997.

[22] S. CHEN, K. R. SREENIVASAN, M. NELKIN & N. CAO. Refined similarity hypothesis for transverse structure functions in fluid turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, **79**(12); 2253, 1997.

[23] L. DA VINCI. Skizzenbücher. *http://www.nickbrowning.com/Galleries/da_Vinci/da_vinci.html*.

[24] J. DAVOUDI & M. R. R. TABAR. Multi scale correlation function in strong turbulence. *Preprint*.

[25] J. DAVOUDI & M. R. R. TABAR. Theoretical model for the Kramers-Moyal description of turbulent cascades. *Phys. Rev. Lett.*, **82**(8); 1680, 1999.

[26] B. DUBRULLE. Affine Turbulence. *Eur. Phys. J. B*, **13**; 1, 2000.

[27] VAN DYKE. *An Album of Fluid Motion.* Parabolic Press, Stanford, 1982.

[28] R. FRIEDRICH & J. PEINKE. Description of a Turbulent Cascade by a Fokker-Planck Equation. *Phys. Rev. Lett.*, **78**; 863, 1997.

[29] R. FRIEDRICH & J. PEINKE. Statistical properties of a turbulent cascade. *Physica D*, **102**; 147, 1997.

[30] U. FRISCH. *Turbulence.* Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[31] TH. GALLA. *Intermittenzanalyse in der vollentwickelten Turbulenz.* Diplomarbeit, Universität Bayreuth, Arbeitsgruppe Hydrodynamik, 1997.

[32] E. GAUDIN, B. PROTAS, S. GOUJON-DURAND, J. WOJCIECHOWSKI & J. E. WESFRIED. Spatial properties of velocity structure functions in turbulent wake flows. *Phys. Rev. E*, **57**(1); R9, 1998.

[33] H. GRANT, R. W. STEWART & A. MOILLIET. A turbulence spectra from a tidal channel. *J. Fluid Mech.*, **12**; 241, 1962.

[34] R. J. HILL. Applicability of Kolmogorov's and Monin's equation of turbulence. *J. Fluid Mech.*, **353**; 67, 1997.

[35] J. O. HINZE. *Turbulence.* Mac Graw Hill Inc., New York, 1987.

[36] H. KAHALERRAS, Y. MAL'ECOT, Y. GAGNE & B. CASTAING. Intermittency and Reynolds number. *Phys. Fluids*, **10**(4); 910, 1998.

[37] J. KIM & R. A. ANTONIA. Isotropy of the small scales of turbulence at low Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, **251**; 219, 1993.

[38] A. N. KOLMOGOROV. *C. R. Acad. Sci. U.R.S.S.*, **30,31,32**, 1941. engl. Übersetzung: The local structure of turbulence in an incompressible viscous fluid for very high Reynolds number. Proc. R. Soc. Lond. A (1991).

[39] A. N. KOLMOGOROV. A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, **13**; 82, 1962.

[40] E. LAMBALLAIS, M. LESIEUR & O. MÝETAIS. Probability distribution functions and coherent structures in a turbulent channel. *Phys. Rev. E*, **56**(6); 6761, 1997.

[41] L. D. LANDAU & E. M. LIFSCHITZ. *Fluid Mechanics*. Pergamon Press, Oxford, 2nd edition, 1987.

[42] ST. LÜCK, J. PEINKE & R. FRIEDRICH. A uniform statistical description of the transition between near and far field turbulence in a wake flow. *Phys. Rev. Lett.*, **83**; 5495, 1999.

[43] V. S. L'VOV & I. PROCACCIA. Fusion rules in turbulent systems with flux equilibrium. *Phys. Rev. Lett.*, **76**; 2898, 1996.

[44] V. S. L'VOV & I. PROCACCIA. The universal scaling exponents of anisotropy in turbulence. *Phys. Fluids*, **8**; 2565, 1996.

[45] B. B. MANDELBROT. Intermittent turbulence in self-similar cascades: divergence of high moments and dimensions of the carrier. *J. Fluid Mech.*, **62**; 331, 1974.

[46] W. D. MCCOMB. *The Physics of Fluid Turbulence.* Clarendon Press, Oxford, 1996.

[47] C. MENEVEAU & K. R. SREENIVASAN. Simple multifractal cascade model for fully developed turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, **59**(13); 1424, 1987.

[48] A. NAERT. *Turbulence dans un jet d'helium gazeux a base temperature.* Dissertation, Grenoble, 1995.

[49] V. NINNI, R. CAMUSSI & G. GUJ. Statistical study of anisotropic anomalous behaviour of a cylinder wake. *Exp. in Fluids*, **26**; 161, 1999.

[50] J. PEINKE. On a Fractal Model for Turbulence. *Z. Naturforsch*, **48a**; 646, 1993.

[51] B. REISNER, CH. RENNER, ST. LÜCK, J. PEINKE, F. CHILLÀ & R. FRIEDRICH. A New Method to Characterize Inhomogeneous Turbulence. In A. Gyr W. Kinzelbach & A. Tsinober, editors, *Fundamental Problematic Issues in Turbulence*, S. 361, Birkäuser, Basel, 1999.

[52] CH. RENNER. *Über statistische Untersuchungen der Geschwindigkeitsfluktuationen in einem turbulenten Freistrahl.* Diplomarbeit, Universität Bayreuth, Arbeitsgruppe Hydrodynamik, 1997.

[53] CH. RENNER. Dissertation, Universität Oldenburg, Arbeitsgruppe Hydrodynamik, in Arbeit.

[54] CH. RENNER, J. PEINKE & R. FRIEDRICH. Experimental indications for Markov properities of small-scale turbulence. *J. Fluid Mech.*, **433**; 383, 2001.

[55] CH. RENNER, B. REISNER, ST. LÜCK, J. PEINKE & R. FRIEDRICH. On the Statistics of Small Scale Turbulence and its Universality. In A. Gyr W. Kinzelbach & A. Tsinober, editors, *Fundamental Problematic Issues in Turbulence*, S. 353, Birkäuser, Basel, 1999.

[56] O. REYNOLDS. An experimental investigation of the cirumstances which determine wether the motion of water shall be direct or sinous, and the law of resistance in parallel chanals. *Phil. Trans. R. Soc.*, **174**(3), 1883.

[57] O. REYNOLDS. On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. *Scientific papers*, **Vol. II**; 535, 1885.

[58] L. F. RICHARDSON. *Weather Prediction by Numerical Process*. Cambridge University Press, Cambridge, 1922.

[59] H. RISKEN. *The Fokker-Planck Equation.* Springer Verlag, Berlin, second edition, 1996.

[60] J. C. ROTTA. Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz (1. Mitteilung). *Z. für Physik*, **129**; 547, 1951.

[61] J. C. ROTTA. Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz (2. Mitteilung). *Z. für Physik*, **131**; 51, 1951.

[62] J. C. ROTTA. *Turbulente Strömungen.* B. G. Teubner, Stuttgart, 1972.

[63] S. G. SADDOUGHI & S. V. VEERAVALLI. Local isotropy in turbulent boundary layers at high Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, **268**; 333, 1994.

[64] T. CH. SCHENCK. *Messung der turbulenten Dissipationsrate in ebenen und achsensymmetrischen Nachlaufströmungen.* Dissertation, Universität Erlangen, Lehrstuhl für Strömungsmechanik, 1999.

[65] M. SIEFERT. *Analyse nichtlinearer Diffusionsprozesse.* Diplomarbeit, Universität Oldenburg, Arbeitsgruppe Hydrodynamik, 2000.

[66] K. R. SREENIVASAN. Fractals and multifractals in fluid turbulence. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **23**; 539, 1991.

[67] P. TABELING & O. CARDOSO. *Turbulence - A Tentative Dictionary*. Plenum Press, New York, 1995.

[68] G. I. TAYLOR. Statistical Theory of Turbulence. *Proc. Roy. Soc. London*, **A 151**; 421, 1935.

[69] N. K. TUTU & R. CHEVRAY. Cross-wire anemometry in high intensity turbulence. *J. Fluid Mech.*, **71**; 785, 1975.

[70] M. S. UBEROI & P. FREYMUTH. Spectra of Turbulence in Wakes behind Circular Cylinders. *Phys. Fluids*, **12**; 1359, 1969.

[71] M. S. UBEROI & S. WALLIS. Spectra of Grid Turbulence. *Phys. Fluids*, **12**; 1355, 1969.

[72] C. H. K. WILLIAMSON. Vortex dynamics in the cylinder wake. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **28**; 477, 1996.

[73] A. M. YAGLOM. A. N. Kolmogorov as a fluid mechanician and founder of a school in turbulence research. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **26**; 1, 1994.

[74] V. YAKHOT. Probability density and scaling exponents of the moments of longitudinal velocity difference in strong turbulence. *Phys. Rev. E*, **57**; 1737, 1998.

[75] Q. Y. YE. *Die turbulente Dissipation mechanischer Energie in scherschichten.* Dissertation, Universität Erlangen, Lehrstuhl für Strömungsmechanik, 1996.

[76] J. ZELLER. *Statistische Eigenschaften der turbulenten Kaskade.* Diplomarbeit, Universität Stuttgart, Institut für Theoretische Physik und Synergetik, 1997.

[77] Y. ZHU & R. A. ANTONIA. Effect of wire separation on X-probe measurements in a turbulent flow. *J. Fluid Mech.*, **28**; 199, 1995.

[78] Y. ZHU & R. A. ANTONIA. Reynold number dependence of the small-scale structure of grid turbulence. *J. Fluid Mech.*, **406**; 81, 2000.

Stichwortverzeichnis

Ähnlichkeitsprinzip, 19, 26, 62
Übergangswahrscheinlichkeit, **73**, 74, 75, 77, 78, 82

Advektionsterm, 18, 20
  Nichtlinearität, 19
anisotrope Strömung, 97, 100
Autokorrelation, 24–26, 54, 64

bedingte Wahrscheinlichkeit, 73–75, 77, 83, 106–108
  doppelt, 83, 107, 108, 122

Castaing-Analyse, 104, 105, 123
Chapman-Kolmogorov-Gleichung, **75–76**, 81, 84, 87, 107
Chapman-Kolmogorov-Test, 105

da Vinci, Leonardo, 21, 29
Determinismus, 13
deterministischer Anteil, 73, 78, 94, 118, 125, 127
deterministischer Prozess, 73
Diffusionskoeffizient, 115, 122–124
Dissipation, 18, 30, 88
Dissipationsterm, 18, 33
Driftkoeffizient, 116–118, 122–124

Energiedissipation, 31, 53
Energietransferrate, 36
Energieübertrag, 29, 30, 34
Erwartungswert, 22, 23
  Verallgemeinerung, 23
ESS, *siehe* Momentenanalyse, erweiterte

Fokker-Planck-Gleichung, **78–79**, 80, 118–122
Formparameter, 37, 60, 94
Fourier-Analyse, 21, 56

Geschwindigkeitsinkrement, **32**, 36, 61, 71, 72, 81, 91, 105
  longitudinales, 32
  Momente, *siehe* Moment
  transversales, 32
  Verteilung, **36**, 37, 38, 59, 61, 67, 71, 72, 79, 80, 94, 95, 104, 105, 110, 112, 113, 120, 124, 126, 129, 131
Geschwindigkeitsschwankung, 20, 23, 27

Hitzdrahtanemometrie, 40–42, 98
Hitzdrahtsonde, 40, 42
  3-Draht, 43
  Eindraht, 42, 45, 46, 53–55, 60
  Halterung, 43
  X-Draht, 42–44, 46, 47, 51, 53, 98, 102
homogene Strömung, 28, 32, 34, 38, 40
  lokal, 29

ideale Turbulenz, 15, 52, 53, 55, 56, 79, 97, 124, 129
Inertialbereich, **31**, 38, 42, 56, 101
Integrale Länge, **25**, 35, 53, 54, 56, 64
Intermittenz, **34**, 36, 56, 59, 60, 68, 94, 130

der Komponenten, 59, 104
Intermittenzfaktor, **34**, 67, 129
Intermittenzkorrektur, 34, 57, 59, 61
isotrope Strömung, 29, 32, 34, 53, 81, 89, 93, 100, 101, 106, 107, 111, 112, 116
lokal, 29–31, 38
isotrope Turbulenz, 52–54, 56, 64, 68, 104, 105, 121, 124

Kalibrierung, 45
Eindraht-Sonde, 45, 46
Fehlerabschätzung, 49
X-Draht-Sonde, 46–48
Kaskade, turbulente, **30**, 34, 63, 69, 71–73, 75, 80, 85, 90, 100, 101, 123, 124, 132
Kaskadenmodell, **29 *f.***, 32, 79, 80
Kaskadenprozess, 104, 105, 109, 127
Kingssches Gesetz, 45
Kolmogorov '41, **30**, 37, 56, 57, 100
Kolmogorov '62, **34**, 36, 37, 79, 80
Kolmogorov, A. N., 13, 30, 31
Ähnlichkeitshypothesen, **30 *f.***, 34, 37, 56, 80
Kolmogorov-Gleichung, 33, 35
Kolmogorov-Länge, **29**, 35, 53, 64, 88, 89
Kontinuitätsgleichung, 19
Korrelationstensor, 24, 25, 27
Kramers-Moyal-Entwicklung, **76–77**, 78
Kramers-Moyal-Koeffizient, **77**, 79, 80, 89, 91, 93, 94, 97, 109, 110, 112, 118, 119, 121, 123–127
Bestimmung, 80, **89–93**

Langevin-Gleichung, 78

Markov-Eigenschaft, 75, 80–82, 85, 87–90, 105, 107–110
Markov-Kohärenzlänge, **85**, 87–90
Markov-Prozess, 71, 72, **74–80**, 81, 82, 85, 107, 108
Mehrpunktwahrscheinlichkeit, 27, **72**, 83
Moment, 23, 24, 27, 38, 57, 64
bedingtes, 91, 110
Betragsmoment, 33, 57
gerader Ordnung, 23
n-tes, 23, 36
ungerader Ordnung, 23, 33, 100
v. Geschw.-Inkrementen, 33, 100
zentrales, 23
Momentenanalyse, 15, 33, 35, 38, 57, 66, 71, 77, 97, 100, 101, 105, 123, 129, 131
erweiterte (ESS), 35, 57, 58, 60, 61, 66–68, 123, 129

Nachlaufströmung
Gitter, 14, 39, 41, 45, **52–54**, 59, 81, 89, 93, 106, 116
Zylinder, 14, 39, 41, 45, **62–64**, 66, 67, 93, 94, 97, 99, 100, 103, 129–132
Navier-Stokes-Gleichung, 13, **17–19**, 20, 58, 79

Randbedingungen, 13, 26, 29, 53
Reynolds, O., 12, 20
Reynolds-Gleichung, 20
Reynolds-Spannung, 20, 43
Reynoldszahl, **18 *f.***, 26, 30, 31, 33–35, 42, 53, 54, 57, 62, 63, 88, 89, 130
abhängigkeit, 54–56, 64, 65, 67, 88
Bestimmung, 55
Taylor, **26**, 54, 65

Schließungsproblem, 20
sensitive Länge, 43

Skalenexponent, 15, **33**, 34, 35, 38, 57, 58, 60, 66, 79, 80, 100–103, 105, 129
  Bestimmung, 35
  der Komponenten, 59, 67
  Korrektur, 34
Skalenverhalten, *siehe* Strukturfunktion, Skalierung
skewness, 23, 37
Spannungstensor, 20
Spektral-Analyse, *siehe* Fourier-Analyse
Spektrum, 22, 25, 56
  Gitter, **56**
  Kolmogorov, 31, 34, 99
  Zylinder, 99
stationäre Strömung, 28, 32, 34
statistischer Prozess, *siehe* stochastischer Prozess
stochastischer Anteil, 94, 115, 118, 125
stochastischer Prozess, 13, 69, 72, **73, 74**, 78, 79, 89, 94, 103, 105, 109, 118–120, 122–124, 127, 131, 132
Strukturfunktion, 33, **33**, 34–36, 38, 57, 58, 61, 79, 81, 100, 103, 105
  Skalierung, 33, 57, 80, 100

Taylor, G. I., 12
Taylor-Länge, **25**, 26, 30, 53, 64, 65, 87–89, 106, 130
  Bestimmung, 26
Taylorhypothese, **23–24**, 99, 102
Turbulenzgrad, **23**, 24, 102

Verbundwahrscheinlichkeit, *siehe* Mehrpunktwahrscheinlichkeit
Viskosität, 17, 29, 31, 87
vollentwickelte Turbulenz, 34, 38, 53–55, 64, 68, 97–99, 102, 105, 110, 123, 124, 131

Wahrscheinlichkeitsdichte, **22**, 23
Wiener Prozess, 78
Wilcoxon-Test, 84, **84–87**, 87, 88, 107, 108, 110

Zufallsfeld, 27
Zufallsprozess, *siehe* stochastischer Prozess
Zufallsvariable, 22, 73
Zweipunktwahrscheinlichkeit, 75

Nachwort

Die hier dargestellten Untersuchungen wurden in der Arbeitsgruppe von Prof. Dr. Joachim Peinke durchgeführt. Eine Arbeitsgruppe, die trotz des Ortswechsels von Bayreuth nach Oldenburg und der damit verbundenen Neuorientierung immer eine konstante, ganz besonders gute Atmosphäre besaß. In einer solchen Umgebung, die geprägt war von Freundlichkeit und weiter auch von Freundschaftlichkeit, großer Offenheit, einer gewissen Leichtigkeit gepaart mit einer großen Kreativität und allgemein viel Menschlichkeit durfte ich meine ersten selbstständigen Schritte in der Forschung wagen. Dass sie gelingen konnten, verdanke ich all jenen, die mich auf die unterschiedlichste Art und Weise unterstützt und mich gestützt haben. Vielen herzlichen Dank dafür!

Herrn Prof. Dr. Joachim Peinke möchte ich auf diesem Wege nochmals ganz herzlichst dafür danken, dass er mir die Möglichkeit bot in seiner Arbeitsgruppe das Forschen lernen und die unterscheidlichen Facetten der Forschung kennen lernen zu dürfen. Er sorgte in verschiedenster Hinsicht für die bestmöglichen Bedingungen und begleitete mich zudem mit seiner freundschaftlichen Art und Weise derart, dass für mich der Begriff Doktorvater nun durch diese Erfahrung eine tiefere Bedeutung gewonnen hat. Ich danke ihm auch für die Übernahme des Erstreferates und desweiteren Herrn Prof. Dr. Mellert für die freundliche Übernahme des Korreferates. Desweiteren danke ich Prof. Dr. Rudolf Friedrich für die zahlreichen fruchtbaren und freundlichen Gespräche, durch die mir die Hintergründe der statistischen Analysen immer klarer wurden.

Der Deutschen Forschungsgemeinschaft sei an dieser Stelle für die freundliche Unterstützung der Untersuchungen im Rahmen der Forschungsprojekte DFG-Pe478/4-1, -2 und -3 gedankt.

Im Rahmen der Arbeitsgruppe möchte ich zunächst Christoph Renner für die vielen guten Diskussionen und für seine Unterstützung bei der Numerik der Analysen danken. Trotz aller fachlichen Aktivitäten kamen auch private Unternehmungen nicht zu kurz. Noch aus Bayreuther Zeiten, aber auch ab und an in Oldenburg auftauchend bereicherte uns Birgit Reisner und manchmal auch Martin Kern. Ihnen sowie Michael, Malte, Stephan, Matthias und allen übrigen Mitgliedern der Hydro-AG nochmals vielen Dank für die außergewöhnliche Zeit.

Michael Cölle danke ich ganz herzlich für die kritische und konstruktive Begutachtung des Manuskripts.

Hervorheben möchte ich weiterhin die überaus gute Zusammenarbeit mit dem Lehrstuhl für Strömungsmechanik von Prof. Dr. Dr. h.c. F. Durst in Erlangen. Erst durch die Möglichkeit dort die Messungen durchführen zu können, konnten die hier vorgestellten Ergebnisse erziehlt werden. Besonders erwähnen möchte ich (jetzt Dr.) Thoralf Schenk, der mir seine durch viel Erfahrung erworbenen Kniffe in der Hitzdraht Messtechnik gerne weiter vermittelte und Dr. Herrmann Lienhard für seine gute Organisation der Windkanal-Messzeiten. Ihnen sowie Dr. S. Becker, S. Knopf, Dr. J. Jovanović und den weiteren Mitarbeitern der Arbeitsgruppe Turbulenz am LSTM danke ich für die immer freundliche Aufnahme in die Arbeitsgruppe während der Aufenthalte in Erlangen.

Nicht zuletzt trägt auch das Privatleben zum Gelingen einer solchen Arbeit bei. Ganz besonders möchte ich mich bei meinen besten Freunden Theresa und Alex für's Zuhören bei all den großen und kleinen Schwierigkeiten bedanken. Mit Eurer Hilfe konnten die wohl notwendiger Weise auftretenden Klippen und Untiefen gemeistert werden. Danke! Dem Gospelchor der ESG-Oldenburg verdanke ich viele schöne Stunden, die mir oft den notwendigen inneren Ausgleich zur Wissenschaft gaben. Sie ermöglichten, dass das alte Gesetz zur Geltung kommen konnte: Nur wenn der Blick gelöst wird von den Problemen, können diese wirklich gelöst werden.

An dieser letzten Stelle, die eigentlich die erste sein müsste, möchte ich mich einmal ausdrücklich bei meinem ehemaligem Physiklehrer H. Pithan bedanken. Bei ihm habe ich all die Grundlagen erwerben können, die es mir ermöglichten das Physikstudium zu bewältigen. Immer wieder habe ich bemerkt und gestaunt, was wir alles bei ihm gelernt haben. Aus meiner noch sehr kurzen Lehrerfahrung kann ich ein wenig ermessen, wie schwierig und großartig das ist. Vielen Dank dafür!

Oldenburg im Juli 2001

Stephan Lück

Lebenslauf

Angaben zur Person

Name:	Stephan Lück
Geburtsdatum:	24.10.1968
Geburtsort:	Kassel

Ausbildung

1975-1979	Besuch der St. Martinus Grundschule in Bigge
1979-1988	Besuch des Gymnasium Petrinum in Brilon (Abitur)
1988-1990	Zivildienst in der Werkstatt für Behinderte in Bigge
1990-1992	Studium der Physik an der Phillips Universität in Marburg (Vordiplom)
1992-1996	Studium der Fächer Mathematik und Physik an der Universität Bayreuth (Abschluss: 1. Staatsexamen)
1997	Beginn der Promotion bei Dr. J. Peinke in Bayreuth
1999	Fortsetzung der Promotion bei Prof. Dr. J. Peinke an der Carl von Ossietzky Universität Oldenburg
2000	Beginn des Referendariats zum 2. Staatsexamen am Franz-Ludwig-Gymnasium in Bamberg
2001	Disputation und Abschluss des Promotionsverfahrens